HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 63

Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen insbesondere an Drehbänken

von

Dipl.-Ing. W. Suchowsky

Berlin
1962

Technischer Bericht Nr. 63

Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen insbesondere an Drehbänken

Zusammenfassung

Die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung besteht in der Erweiterung der theoretischen Erkenntnisse über selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen. Die Betrachtungen werden am Beispiel der Drehbank durchgeführt.

Nachdem im ersten Teil der Arbeit die Bewegungsgleichungen des Problems unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Schnittkraft vom Spanquerschnitt bzw. von der Schnittgeschwindigkeit aufgestellt worden sind, wird auf die Berechnung der Stabilität mit Hilfe des Kriteriums von Hurwitz hingewiesen.

Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit der Klassifikation der Bewegungsvorgänge hinsichtlich der Stabilität, die mit Hilfe von Matrizen vorgenommen wird.

Im dritten Teil wird über den Einsatz von elektrischen Analogrechnern zur Lösung des Problems der selbsterregten Schwingungen an Drehbänken berichtet.

Im vierten Teil der Arbeit werden die durchgeführten experimentellen Untersuchungen beschrieben.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. Suchowsky

(Dipl.-Ing. W. Suchowsky)

Der Abteilungsleiter

gez. Matthieu

(Prof.Dr.phil.P. Matthieu)

Der Institutsdirektor

gez. Gundlach

(Prof.Dr.-Ing.F.W. Gundlach)

Berlin-Charlottenburg, den 8. Juni 1962

Inhalt

	Seite
I. Mathematische Theorie	1
1. Einleitung	1
2. Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen	2
3. Der Gültigkeitsbereich der Bewegungsgleichungen	6
4. Die Bestimmung der Konstanten	7
5. Die Lösung der Bewegungsgleichungen	
a) Längsdrehen auf kleineren Drehbänken	8
α) Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen	13
ß) Die Ermittlung der Eigenvektoren und der Eigenrichtungen	15
b) Einstechdrehen	16
c) Längsdrehen	17
6. Selbsterregte Drehschwingungen	21
II. Die Klassifikation der Bewegungsvorgänge hinsichtlich der Stabilität	21
1. Einführung der Matrizenschreibweise	22
2. Das Eigenwertproblem und die Klassifikation der Bewegungsvorgänge	22
a) reell symmetrische Matrizen	23
α) Grundsätzliche Betrachtungen über die Eigenwerte und ihr Vorzeichen	24
b) nichtsymmetrische quadratische Matrizen	26
α) Grundsätzliche Betrachtungen über die Eigenwerte und ihr Vorzeichen	27
ß) Anwendung des Verfahrens von FALK auf nichtsymmetrische Matrizen	31
III. Der Einsatz von Analogrechnern zur Berechnung der Stabilität von Drehmaschinen	33
1. Programmierung	
IV. Experimentelle Untersuchung selbsterregter Schwingungen an Drehbänken	36
V. Zusammenfassung der Ergebnisse	38
VI. Literatur	40

Zusammenstellung der Formelzeichen

a	Spantiefe
c, k	Federkonstante
m	Masse
P	Schnittkraft
P_w	wechselnder Anteil der Schnittkraft
r	Dämpfungsfaktor
s	Vorschub
x	Auslenkung in x-Richtung (Richtung senkrecht zur Werkstückachse, horizontal)
y	Auslenkung in y-Richtung (Richtung der Werkstückachse)
z	Auslenkung in z-Richtung (Richtung senkrecht zur Werkstückachse, vertikal)
$\mathcal{A}$	Massen- oder Trägheitsmatrix
$\mathcal{B}$	Dämpfungsmatrix
$\mathcal{C}$	Federmatrix
λ	Eigenwert; $p_i = \sqrt{\lambda_i}$
ω	Kreisfrequenz

Indizes:

1	auf das Schwingungssystem 1 (System Werkstück) bezogen
2	auf das Schwingungssystem 2 (System Werkzeug) bezogen
x	in Richtung x
y	in Richtung y
z	in Richtung z

I. Mathematische Theorie

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wollen wir selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen betrachten, Diese Schwingungen, die auch als Ratterschwingungen bezeichnet werden, stellen bei der spanabhebenden Bearbeitung der Metalle ein wichtiges Problem dar, weil durch ihr Auftreten die Qualität der Werkstücke, die Standzeit der Werkzeuge und auch die Lebensdauer der Werkzeugmaschine in erheblichem Maße vermindert wird. Es ist daher eine wichtige Aufgabe, die grundlegenden Richtlinien zu erarbeiten, nach denen Werkzeugmaschinen hergestellt werden müssen, die innerhalb ihres Arbeitsbereiches ratterfrei sind. Die Darlegung der hierzu erforderlichen Gedankengänge erfolgt am Beispiel der Drehmaschine, die als eine der wichtigsten Werkzeugmaschinen der mathematischen Behandlung gut zugänglich ist.

Selbsterregte oder selbststeuernde Schwingungssysteme sind dadurch ausgezeichnet, daß sie die zur Aufrechterhaltung der Schwingung erforderliche Energie aus einer nichtperiodischen Energiequelle entnehmen. Diese Entnahme erfolgt im Takt der Schwingung.

Bei selbsterregten Schwingungen ist zwischen selbstentfachenden und selbsterhaltenden Schwingungen zu unterscheiden. Während sich selbstentfachende Schwingungen von selbst aus kleinsten Amplituden heraus aufschaukeln, entstehen selbsterhaltende Schwingungen erst nach einem endlichen Anstoß. Bei dem Problem der Ratterschwingungen an Drehbänken liegt eine Kombination beider Fälle vor. Der erforderliche beliebig kleine Anstoß wird beispielsweise durch Inhomogenitäten im Werkstoffgefüge erzeugt.

Sind die Verluste durch Dämpfung bei einer selbsterhaltenden Schwingung klein gegenüber der im System vorhandenen Energie, so brauchen dem Schwinger nur geringe Energiemengen zur Verlustdeckung zugeführt zu werden. Er schwingt dann in der Nähe seiner Eigenfrequenz. Dieser bei selbsterhaltenden Schwingungen oft anzutreffende Fall, der auch bei den zu betrachtenden Ratterschwingungen vorliegt, wird als entdämpfte Eigenschwingung bezeichnet.

2. Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen

Für die Praxis ist der eingeschwungene Zustand beim Rattern von geringer Bedeutung. Es interessiert vielmehr, unter welchen Umständen nach einer Störung ein Anwachsen der Schwingungsamplituden möglich ist. Wir können daher das Problem linearisieren.

Die mathematische Behandlung des Problems wird im folgenden zunächst so durchgeführt, daß aus den aufzustellenden Bewegungsgleichungen mit Hilfe eines geeigneten Lösungsansatzes die charakteristische Gleichung ermittelt wird, deren Koeffizienten für eine Stabilitätsuntersuchung herangezogen werden.

Durch Versuche konnte festgestellt werden, daß das dynamische Verhalten des Maschinengestells bei Drehmaschinen nur einen geringen Einfluß auf die Entstehung selbsterregter Schwingungen ausübt. Im Gesamtaufbau der Maschine sind es hauptsächlich zwei Schwingungssysteme, die an Ratterschwingungen beteiligt sind und die als Haupt- oder Leitsysteme bezeichnet werden.

1) System Werkstück: Es besteht aus Hauptspindel und Werkstück oder aus Hauptspindel, Werkstück und Reitstock. Es erhält in allen künftigen Berechnungen den Index 1.

2) System Werkzeug: Es besteht aus dem Meißel und den Supporten. Es wird im folgenden stets mit dem Index 2 bezeichnet.

Es gilt nun, für diese an der Schwingung beteiligten Elemente ein geeignetes Ersatzsystem zu finden und für dieses die Bewegungsgleichungen aufzustellen.

Offenbar ist im vorliegenden Fall die Masse, (die Dämpfung) und die Steifigkeit kontinuierlich verteilt, wie dies bei in der Praxis vorkommenden Schwingungsgebilden meist anzutreffen ist. Ein solches System besitzt eine unendliche Anzahl von Eigenfrequenzen, Schwingt es nun translatorisch mit oder in unmittelbarer Nähe einer dieser Eigenfrequenzen, so können wir es durch ein einfaches Feder-Masse-System ersetzen. Die der Wirklichkeit äquivalenten Systemkonstanten sind durch Versuch zu bestimmen.

Die Systeme Werkstück und Werkzeug werden also durch je einen Punktkörper ersetzt. Jede der beiden Punktmassen stützt sich durch drei Federn im Raum ab, die nicht in den Koordinatenrichtungen liegen. Beide Systeme besitzen je drei Freiheitsgrade.

Eine auf dieses Ersatzsystem ausgeübte Kraft ruft eine Verschiebung hervor, die nicht in die Richtung der Kraft fällt. Zwischen Kraft und Verschiebung besteht eine tensorielle Abhängigkeit /4/ S. 134 u. 135.

Die Bewegungsgleichungen für das Ersatzsystem sollen zunächst unter alleiniger Benutzung des von Tlusty /14/ S.343 entwickelten Prinzips der Lagekopplung abgeleitet werden, durch das die Entstehung der Ratterschwingungen auf ihre Abhängigkeit von den Zerspanungsgrößen, der Richtung der Federn und den übrigen Konstanten dieses Systems zurückgeführt wird. Andere Anregungsmechanismen, die noch weiter unten in dieser Arbeit erwähnt werden, können dann in Spezialfällen durch Einfügen zusätzlicher Glieder in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden.

Die bei der Zerspanung an der Schnittstelle entstehende Kraft , die Schnittkraft oder Zerspankraft genannt wird, wirkt auf beide Schwinger mit gleicher Größe, aber in entgegengesetzter Richtung. Sie ist von folgenden Einflußgrößen abhängig:

1) Festigkeit des Werkstoffes
2) Vorschub s
3) Spantiefe a
4) Schnittgeschwindigkeit v
5) Geometrische Schneidengrößen
6) Reibungsverhältnisse an der Schnittstelle

Die für unsere Betrachtung wesentlichen Einflüsse sind unter Punkt 2 bis 4 erwähnt. Die Abhängigkeit der Schnittkraft von der Schnittgeschwindigkeit kann zunächst vernachlässigt werden, weil sie lediglich in Spezialfällen auftritt.
Wenn wir also veraussetzen, daß die Schnittkraft nur vom Spanquerschnitt abhängig ist (Berücksichtigung von Punkt 2 und 3), so ergibt sich für diese Kraft

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(x,y) \qquad (1)$$

$$x = a + x_2 - x_1 \qquad\qquad y = s + y_2 - y_1$$

Der Schnittkraftvektor ist eine Funktion des Verschiebungsvektors. Die Abhängigkeit der Schnittkraft von der Koordinate z wird vernachlässigt, weil sie von höherer Ordnung klein ist.

Wir wollen nun die Größe der Schnittkraft bei einer Veränderung der Spandicke und der Spanbreite entsprechend x_2-x_1 bzw. entsprechend y_2-y_1 ermitteln. Hierzu benutzen wir die Taylorsche Formel, in der alle Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, vernachlässigt werden:

$$\mathfrak{P}(x,y) = \mathfrak{P}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}(x_2-x_1) + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}(y_2-y_1)$$

Die Schnittkraft besteht also aus einem konstanten Anteil $\mathfrak{P}$ und einem von der Differenz der Bewegungen der Schwingungssysteme 1 und 2 abhängigen Anteil $\mathfrak{P}_W$. Nur der Anteil $\mathfrak{P}_W$ ist für uns von Bedeutung:

$$\mathfrak{P}_W = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}(x_2-x_1) + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}(y_2-y_1) = \mathfrak{a}\,(x_2-x_1) + \mathfrak{b}\,(y_2-y_1) \tag{2}$$

Hierin ist

$$\mathfrak{a} = \{a_x; a_y; a_z\} \qquad \mathfrak{b} = \{b_x; b_y; b_z\} \tag{3}$$

mit

$$a_x = \frac{\partial P_x}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} = \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\alpha \qquad b_x = \frac{\partial P_x}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} = \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\alpha$$

$$a_y = \frac{\partial P_y}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} = \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\beta \qquad b_y = \frac{\partial P_y}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} = \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\beta$$

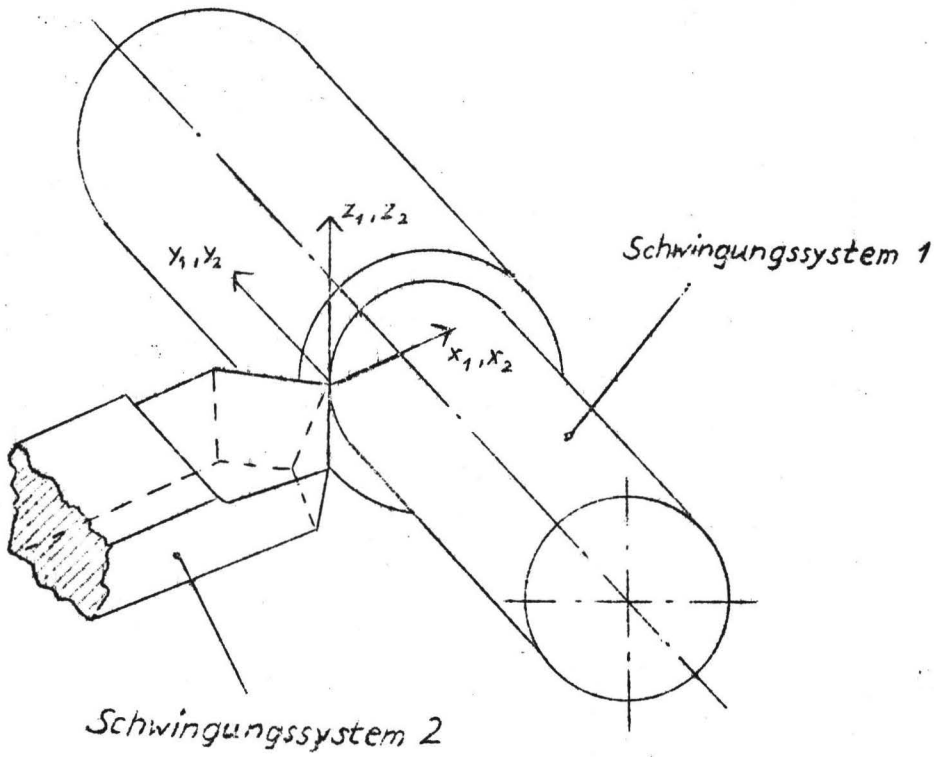
$$a_z = \frac{\partial P_z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} = \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\gamma \qquad b_z = \frac{\partial P_z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} = \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\gamma \tag{4}$$

Für die Winkel gilt:

α...Winkel zwischen der x-Richtung und Schnittkraft
β...Winkel zwischen der y-Richtung und Schnittkraft
γ...Winkel zwischen der z-Richtung und Schnittkraft

Die Komponenten des Kraftvektors $\mathfrak{P}_W$ in x, y, z-Richtung ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned} P_{W_x} &= a_x\,(x_2-x_1) + b_x\,(y_2-y_1) \\ P_{W_y} &= a_y\,(x_2-x_1) + b_y\,(y_2-y_1) \\ P_{W_z} &= a_z\,(x_2-x_1) + b_z\,(y_2-y_1) \end{aligned} \tag{5}$$



Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für das Ersatzsystem benutzen wir das Newtonsche Grundgesetz

Masse x Beschleunigung = Kraft

Unter Verwendung dieser Vorschrift erhalten wir bei Vernachlässigung von Dämpfung das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 + c_{xx}x_1 + c_{xy}y_1 + c_{xz}z_1 &= P_{w_x} \\
m_1\ddot{y}_1 + c_{yx}x_1 + c_{yy}y_1 + c_{yz}z_1 &= P_{w_y} \\
m_1\ddot{z}_1 + c_{zx}x_1 + c_{zy}y_1 + c_{zz}z_1 &= P_{w_z} \\
m_2\ddot{x}_2 + k_{xx}x_2 + k_{xy}y_2 + k_{xz}z_2 &= -P_{w_x} \\
m_2\ddot{y}_2 + k_{yx}x_2 + k_{yy}y_2 + k_{yz}z_2 &= -P_{w_y} \\
m_2\ddot{z}_2 + k_{zx}x_2 + k_{zy}y_2 + k_{zz}z_2 &= -P_{w_z}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Mit (5) wird hieraus:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 + c_{xx}x_1 + c_{xy}y_1 + c_{xz}z_1 - a_x(x_2-x_1) - b_x(y_2-y_1) &= 0 \\
m_1\ddot{y}_1 + c_{yx}x_1 + c_{yy}y_1 + c_{yz}z_1 - a_y(x_2-x_1) - b_y(y_2-y_1) &= 0 \\
m_1\ddot{z}_1 + c_{zx}x_1 + c_{zy}y_1 + c_{zz}z_1 - a_z(x_2-x_1) - b_z(y_2-y_1) &= 0
\end{aligned}
$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_{xx}x_2 + k_{xy}y_2 + k_{xz}z_2 + a_x(x_2-x_1) + b_x(y_2-y_1) = 0 \quad (7)$$
$$m_2\ddot{y}_2 + k_{yx}x_2 + k_{yy}y_2 + k_{yz}z_2 + a_y(x_2-x_1) + b_y(y_2-y_1) = 0$$
$$m_2\ddot{z}_2 + k_{zx}x_2 + k_{zy}y_2 + k_{zz}z_2 + a_z(x_2-x_1) + b_z(y_2-y_1) = 0$$

Es liegt also kein konservatives System vor. Für die Krafteinflußzahlen unseres Ersatzsystems 1 gilt /4/ S.138:

$$c_{xx}=\sum_{i=1}^{3} c_i \cos^2\alpha_i \quad c_{yy}=\sum_{i=1}^{3} c_i \cos^2\beta_i \quad c_{zz}=\sum_{i=1}^{3} c_i \cos^2\gamma_i$$
$$c_{xy}= c_{yx}=\sum_{i=1}^{3} c_i \cos\alpha_i \cos\beta_i \quad c_{xz}=c_{zx}=\sum_{i=1}^{3} c_i \cos\alpha_i \cos\gamma_i$$
$$c_{yz}= c_{zy}=\sum_{i=1}^{3} c_i \cos\beta_i \cos\gamma_i \quad (8)$$

In (8) bedeutet:

c_i.....Federkonstante der Feder i
α_i.....Winkel zwischen Feder und positiver x-Richtung
β_i.....Winkel zwischen Feder und positiver y-Richtung
γ_i.....Winkel zwischen Feder und positiver z-Richtung

Es gilt der Maxwellsche Vertauschungssatz. Den Gleichungen (8) entsprechende Formeln gelten für die Federkonstanten des Ersatzsystems 2.

3. Der Gültigkeitsbereich der Bewegungsgleichungen

Für viele praktische Fälle ist es möglich, das Gleichungssystem (7) sinnvoll zu vereinfachen. Hierbei sind folgende Punkte zu beachten:

1) Abmessungen der Drehmaschine (Spitzenhöhe, Spitzenweite)
2) Bearbeitungsverfahren (Einstechen, Längsdrehen)
3) Form des Werkstückes (lang und dünn, kurz und dick)
4) Einspannung des Werkstückes (Lünette, Reitstock)
5) Einspannung des Meißels (weit ausgespannt, kurz eingespannt)

Welche Vernachlässigungen in den einzelnen Spezialfällen zulässig sind, werden wir bei der weiter unten durchgeführten Betrachtung solcher Fälle sehen. Allgemein kann gesagt werden, daß für kleinere Maschinen (z.B. Spitzenhöhe 160 mm, Spitzenweite 1000 mm, Antriebsleistung 3 PS) die ersten drei Gleichungen aus (7) für die Berechnung ausreichen. Für schwere Walzendrehbänke (Spitzenhöhe 650 mm, Spitzenweite 5000 mm, Antriebsleistung 88,5 PS) muss das gesamte Gleichungssystem herangezogen

werden.

Es kann jedoch auch möglich sein, daß das Gleichungssystem (7) durch Zusatzglieder ergänzt werden muß. Dies ist insbesondere dann nötig, wenn außer der Lagekopplung, die zur Ableitung der Gleichung (7) verwendet wurde, noch weitere Anregungsmechanismen wirksam werden. Über die zu Ratterschwingungen führenden Anregungsmechanismen finden sich in der Literatur eine Reihe von Angaben. Es werden z.B. ausser der Lagekopplung beschrieben:

1) die fallende Kennlinie der Schnittkraft über der Schnittgeschwindigkeit /12/ S. 37
2) die Zeitverzögerung zwischen Schnittkraft und momentanem Spanquerschnitt /6/ S. 33 ff
3) das Einschneiden in alte Rattermarken /13/ S. 95

Für das Einschneiden in alte Rattermarken findet sich in der Literatur auch der Ausdruck "Prinzip der Reproduktion" /7/ S.31. Tlusty bezeichnet die durch diesen Mechanismus entstehenden Schwingungen nicht als selbsterregt, sondern als fortschreitend erzwungen /14/ S. 326. Hölken hat festgestellt, daß das Prinzip der Reproduktion bei der Stabilitätsberechnung von Drehbänken vernachlässigt werden kann /6/ S. 53 und S. 54.

4. Die Bestimmung der Konstanten

Ein weiteres Problem stellt die Bestimmung der Konstanten im Gleichungssystem (7) dar.

Die grundlegenden Tatsachen, die bei Steifigkeitsmessungen zu beachten sind, finden sich in einer Veröffentlichung von Lysen /5/ S. 3.

Wird das Schwingungssystem zu Ratterschwingungen angeregt, so zeigt der Versuch, daß sich für den ebenen Fall die zwei Schwingungskomponenten zu einer Bahnkurve in Form einer Ellipse überlagern. In der Richtung der Haupt- und Nebenachse dieser Ellipse haben wir uns die Federn des Ersatzsystems angebracht zu denken.

Die an der Schwingung beteiligte Masse ist aus $m = \frac{c}{\omega^2}$ /11/ S.435 näherungsweise zu bestimmen.

5. Die Lösung der Bewegungsgleichungen

a) Längsdrehen auf kleineren Drehbänken

Der erste Fall, den wir betrachten wollen, liegt in der Praxis dann vor, wenn das Werkstück keine Bewegungen in z-Richtung ausführt. Dies können wir uns dadurch hervorgerufen denken, daß ein Schwingungsdämpfer in der Form einer mitlaufenden Lünette auf dem Bettschlitten angebracht wird /11/ S.381 und S.382, der nur zwei vertikale Backen besitzt. Da wir eine kleinere Drehbank betrachten wollen, können wir das System Werkzeug als starr ansehen. Aus diesen Bedingungen folgt:

$$z_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \qquad y_2 = 0 \qquad z_2 = 0$$

Vom Gleichungssystem (7) bleibt dann übrig:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c_{xx}x + c_{xy}y + a_x x + b_x y &= 0 \\ m\ddot{y} + c_{yx}x + c_{yy}y + a_y x + b_y y &= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Mit dem Lösungsansatz

$$x = X\, e^{pt} \qquad\qquad y = Y\, e^{pt} \qquad (10)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} (mp^2 + c_{xx} + a_x)\, X + (c_{xy} + b_x)\, Y &= 0 \\ (c_{yx} + a_y)\, X + (mp^2 + c_{yy} + b_y)\, Y &= 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Dieses homogene Gleichungssystem besitzt dann und nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante der X und Y verschwindet:

$$\begin{vmatrix} mp^2 + c_{xx} + a_x & c_{xy} + b_x \\ c_{yx} + a_y & mp^2 + c_{yy} + b_y \end{vmatrix} = 0$$

$$(mp^2+c_{xx}+a_x)(mp^2+c_{yy}+b_y) - (c_{yx}+a_y)(c_{xy}+b_x) = 0$$

$$p^4+\frac{1}{m}(c_{xx}+c_{yy}+a_x+b_y)p^2+\frac{1}{m^2}(c_{xx}c_{yy}+c_{yy}a_x+c_{xx}b_y+a_xb_y-c_{xy}c_{yx}-$$
$$-c_{yx}b_x-c_{xy}a_y-a_yb_x) = 0 \qquad (12)$$

$$p^2 = -\frac{c_{xx}+c_{yy}+a_x+b_y}{2m} \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{(c_{xx}+c_{yy}+a_x+b_y)^2}{4m^2} - \frac{1}{m^2}(c_{xx}c_{yy}+c_{yy}a_x+c_{xx}b_y-c_{xy}c_{yx}-c_{yx}b_x-c_{xy}a_y)} \qquad (13)$$

Die Größen c_{xy}, c_{yx} in Gleichung (13) können vernachlässigt werden, wenn sie klein gegenüber den anderen Konstanten sind.

Die auf diese Weise ermittelten Wurzeln der charakteristischen Gleichung (12) können nun in Abhängigkeit von den Konstanten folgende Form aufweisen:

1) die Wurzeln sind rein imaginär
2) die Wurzeln sind teils rein imaginär, teils reell
3) die Wurzeln sind komplex

Es ist offensichtlich, daß diese Wurzeln und das Vorzeichen ihrer Realteile ein wichtiges Kennzeichen für die Bewegungen des zu untersuchenden Schwingers darstellen. Für das vorliegende Problem ist insbesondere die Frage nach der Stabilität dieser Bewegungen von Bedeutung. Auch die Ermittlung der Stabilitätsgrenze ist wichtig.

Die auftretenden Bewegungsvorgänge können grundsätzlich monoton oder oszillatorisch mit abnehmender, anwachsender oder konstanter Amplitude sein. Monotone Bewegungen folgen aus reellen Lösungen p. Sie nehmen mit wachsender Zeit t ab, wenn $p < 0$ ist, und nehmen zu für $p > 0$.

Für rein imaginäre Lösungen p ist die Bewegung oszillatorisch, aber die Amplitude ist weder zu- noch abnehmend.

Durch komplexe Lösungen $p = \rho \pm i\omega$ werden Schwingungsvorgänge beschrieben. Das Vorzeichen des Realteils ist dabei für das Auftreten abnehmender oder anwachsender Amplituden maßgebend. Ist $\rho < 0$, so klingt die Schwingung ab. Für $\rho > 0$ schaukelt sie sich auf.

Übersichtlich zusammengefasst ergibt sich aus diesen Betrachtungen die folgende Tabelle:

Tabelle 1

Bewegung (Amplitude)	oszillatorisch	monoton
konstant	p rein imaginär $p = i\omega$	p verschwindend $p = 0$ Ruhe für alle t
zunehmend	p Komplex mit positivem Realteil $p = +\varrho \pm i\omega$	p positiv reell $p = +\varrho$
abnehmend	p Komplex mit negativem Realteil $p = -\varrho \pm i\omega$	p negativ reell $p = -\varrho$

Im Anschluß an diese Überlegungen erscheint es selbstverständlich, daß wir grundsätzlich zwischen zwei Stabilitätsgrenzen unterscheiden müssen:

1) Grenze der monotonen Stabilität
2) Grenze der oszillatorischen Stabilität

zu 1): Bestimmung der monotonen Stabilitätsgrenze

Aus der obenstehenden Tabelle ist ersichtlich, daß für positiv reelles p monotone Instabilität und für negativ reelles p monotone Stabilität zu erwarten ist. Die Grenze der monotonen Stabilität ist durch $p = 0$ gegeben.

Die Berechnung der monotonen Stabilitätsgrenze läßt sich für den vorliegenden Fall folgendermaßen durchführen.
Aus (13):

$$-\frac{c_{xx}+c_{yy}+a_x+b_y}{2m} + \sqrt{\frac{(c_{xx}+c_{yy}+a_x+b_y)^2}{4m^2} - \frac{1}{m^2}(c_{xx}c_{yy}+c_{yy}a_x+ +c_{xx}b_y+a_xb_y-c_{xy}c_{yx}-c_{yx}b_x-c_{xy}a_y-a_yb_x)} = 0$$

Durch Quadrieren ergibt sich hieraus als Bedingung für die monotone Stabilitätsgrenze:

$$c_{xx}c_{yy}+c_{yy}a_x+c_{xx}b_y+a_xb_y-c_{xy}c_{yx}-c_{yx}b_x-c_{xy}a_y-a_yb_x = 0 \qquad (14)$$

Ein Vergleich zwischen (14) und (12) zeigt, daß (14) gleich dem letzten Summanden in (12) ist (ohne Berücksichtigung von $\frac{1}{m^2}$), den wir mit a_o bezeichnen wollen. Dieses Ergebnis ist allgemeingültig /4/ S. 118. Die Grenze der monotonen Stabilität ist stets gegeben durch die Bedingung

$$a_o = 0$$

zu 2): Bestimmung der oszillatorischen Stabilitätsgrenze

Wir betrachten die Gleichung (13) und bezeichnen den unter der Wurzel stehenden Ausdruck mit W. Dann können wir folgende Fälle unterscheiden:

Tabelle 2

$W < 0$	$p^2 = -\varrho \pm \sqrt{W}$	$p = \pm\sqrt{-\varrho \pm i\sqrt{-W}}$	oszillatorisch instabil
$W = 0$	$p^2 = -\varrho$	p rein imaginär: $p = \pm i\sqrt{\varrho}$	oszillatorisch stabil; oszillatorische Stabilitätsgrenze
$W > 0$ $\sqrt{W} < \varrho$	$p^2 = -\varrho \pm \sqrt{W}$	p rein imaginär: $p = \pm\sqrt{-\varrho \pm \sqrt{W}}$ $p = \pm i\sqrt{\varrho \pm \sqrt{W}}$	oszillatorisch stabil
$W > 0$ $\sqrt{W} > \varrho$	$p^2 = -\varrho \pm \sqrt{W}$	$p_{1,2} = \pm\sqrt{-\varrho + \sqrt{W}}$ $p_{3,4} = \pm i\sqrt{\varrho + \sqrt{W}}$	monotone Instabilität
$W > 0$ $\sqrt{W} = \varrho$	$p^2 = -\varrho \pm W$	$p_{1,2} = \pm\sqrt{-\varrho + \sqrt{W}} = 0$ $p_{3,4} = \pm i\sqrt{\varrho + \sqrt{W}}$	(monoton stabil) oszillatorisch stabil

Aus dieser Übersicht ist zu ersehen, daß die oszillatorische Stabilitätsgrenze für W = 0 erreicht wird. Mit (13) bekommen wir also:

$$\frac{(c_{xx}+c_{yy}+a_x+b_y)^2}{4m^2} - \frac{1}{m^2}\,(c_{xx}c_{yy}+c_{yy}a_x+c_{xx}b_y-c_{xy}c_{yx}-c_{yx}b_x-c_{xy}a_y) = 0 \tag{15}$$

Wir fragen nun nach dem kritischen Schnittkraftanstieg $\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=s}}$, der bei Vorgabe aller übrigen Konstanten des Ersatzsystems, einschließlich des Schnittkraftanstieges $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=s}}$, die oszilla-

torische Stabilitätsgrenze charakterisiert. Aus (15) ergibt sich:

$$(c_{xx}+c_{yy}+a_x+b_y)^2-4(c_{xx}c_{yy}+c_{yy}a_x+c_{xx}b_y-c_{xy}c_{yx}-c_{yx}b_x-c_{xy}a_y) = 0$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir mit (4):

$$\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} = -\frac{2(c_{yy}-c_{xx})\cos\beta+4c_{yx}\cos\alpha+2\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\alpha\cos\beta}{2\cos^2\beta} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{\left[2(c_{yy}-c_{xx})\cos\beta+4c_{yx}\cos\alpha+2\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\alpha\cos\beta\right]^2}{(2\cos^2\beta)^2}-}$$

$$-\frac{1}{\cos^2\beta}\left[\left(\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2\right|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos^2\alpha+2(c_{xx}-c_{yy})\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\alpha+4\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}\cos\beta+c_{xx}^2-2c_{xx}c_{yy}+\right.$$

$$\left.+c_{yy}^2+4c_{xy}c_{yx}\right] \qquad (16)$$

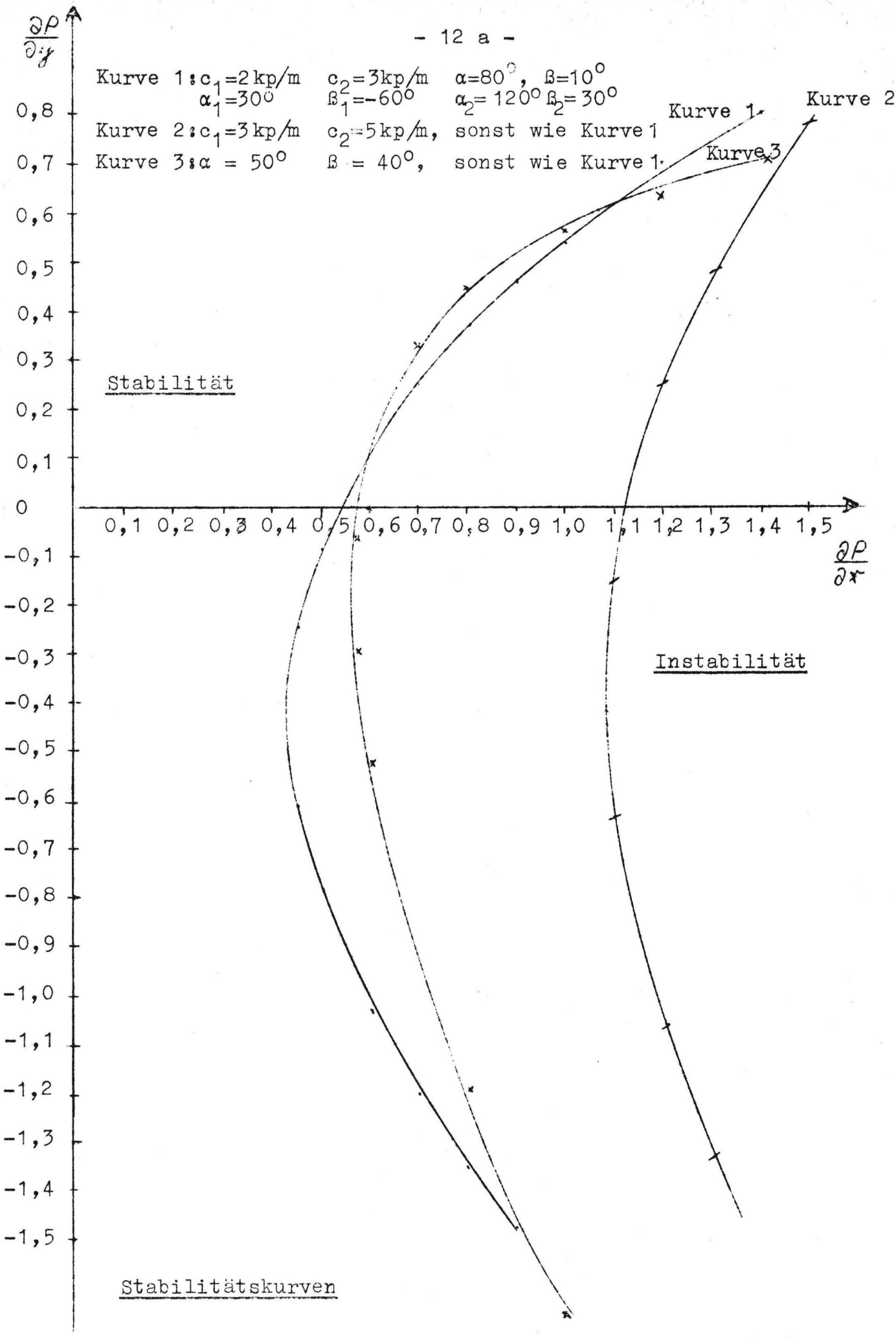
Mit (16) ist der kritische Schnittkraftanstieg gefunden. Da keine der Größen $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$, $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$ vor der anderen ausgezeichnet erscheint, hätte aus (15) auch das $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$ in Abhängigkeit von $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$ bestimmt werden können.

Aus diesem Ergebnis läßt sich erkennen, daß es möglich ist, für ein bestimmtes $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$, wenn alle übrigen Grössen als Parameter festgehalten werden, das kritische $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$ zu berechnen und über $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$ so aufzutragen, daß eine Kurve entsteht, die das oszillatorisch stabile Gebiet vom oszialltorisch instabilen trennt. Anhand solcher Stabilitätskurven ist es also ohne weiteres möglich, Aussagen über die oszillatorische Stabilität oder Instabilität eines bestimmten Schwingungssystems zu machen.

Wir wollen einige Stabilitätskurven berechnen und zeichnen. Für Kurve 2 wurde die Federsteifigkeit erhöht und für Kurve 3 wurde die Lage der Schnittkraft geändert.

Aus diesen Betrachtungen können folgende Schlüsse gezogen werden:

1) Für einen bestimmten Schnittkraftanstieg $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$ wird die oszillatorische Stabilitätsgrenze der Bewegungen eines Schwingungssystems mit größerer Steifigkeit (Kurve 2) erst für einen steileren Schnittkraftanstieg $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}$ überschritten als für ein


Kurve 1: c_1=2 kp/m c_2=3 kp/m α=80°, β=10°
α_1=30° β_1=-60° α_2= 120° β_2= 30°
Kurve 2: c_1=3 kp/m c_2=5 kp/m, sonst wie Kurve 1
Kurve 3: α = 50° β = 40°, sonst wie Kurve 1
Kurve 1
Kurve 2
Kurve 3
Stabilität
Instabilität
Stabilitätskurven
$\frac{\partial P}{\partial y}$
$\frac{\partial P}{\partial x}$
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
-0,7
-0,8
-0,9
-1,0
-1,1
-1,2
-1,3
-1,4
-1,5
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5

Schwingungssystem mit geringerer Steifigkeit (Kurve 1).

2) Im Bereich $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}} \geqq 0$, negative Schnittkraftanstiege $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}$ treten in der Praxis nicht auf, wird für $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}} = 0$ ist oszillatorische Stabilitätsgrenze bei kleinerem $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}$ erreicht als für $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}} \neq 0$ (z.B. Kurve 1).

3) Wird die Lage der Schnittkraft P in der Weise geändert, daß der Winkel α zwischen Kraftrichtung und positiver x-Achse kleiner wird (Winkel β wird größer), während alle von diesen Winkeln nicht abhängigen Größen des Schwingungssystems konstant bleiben (Kurve 3), so wird die oszillatorische Stabilitätsgrenze ober- bzw. unterhalb bestimmter Grenzschnittkraftanstiege $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}$ erst für steilere Schnittkraftanstiege $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}$ erreicht als für das ursprüngliche Schwingungssystem (Kurve 1). Innerhalb der erwähnten Grenzschnittkraftanstiege gilt umgekehrt, daß die oszillatorische Stabilitätsgrenze des Schwingungssystems mit kleinerem Winkel α (Kurve 3) für geringere Schnittkraftanstiege $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}$ eher erreicht wird als bei dem Schwingungssystem mit größerem Winkel α (Kurve 1).

α) Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen (9)

Nach der Ermittlung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung können wir die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen angeben. Sie lautet:

$$\begin{aligned} x &= X_1\, e^{p_1 t} + X_2\, e^{p_2 t} + X_3\, e^{p_3 t} + X_4\, e^{p_4 t} \\ y &= Y_1\, e^{p_1 t} + Y_2\, e^{p_2 t} + Y_3\, e^{p_3 t} + Y_4 e^{p_4 t} \end{aligned} \qquad (17)$$

Für rein imaginäre Lösungen

$$p_{1,2} = \pm\, i\omega_1 \qquad\qquad p_{3,4} = \pm\, i\omega_2$$

erhalten wir aus (17)

$$x = X_1 \cos\omega_1 t + X_2 \sin\omega_1 t + X_3 \cos\omega_2 t + X_4 \sin\omega_2 t$$

Entsprechendes gilt für y, so daß sich schließlich ergibt:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin(\omega_1 t + \delta) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon) \\ y &= k_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \delta) + k_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon) \end{aligned} \qquad (18)$$

Sind die Lösungen teils rein imaginär, teils reell:

$$p_{1,2} = \pm i\omega_1 \qquad\qquad p_{3,4} = \pm \omega_2,$$

so bekommen wir aus (17)

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin(\omega_1 t + \delta) + A_2 \sin\omega_2 t + A_3 \cos\omega_2 t \\ y &= k_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \delta) + k_2 A_2 \sin\omega_2 t + k_3 A_3 \cos\omega_2 t \end{aligned} \tag{19}$$

Wenn die Lösungen alle komplex sind, also die Form

$$\begin{aligned} p_1 &= \varrho + i\omega & p_2 &= -(\varrho - i\omega) \\ \bar{p}_1 &= p_3 = \varrho - i\omega & \bar{p}_2 &= p_4 = -(\varrho + i\omega) \end{aligned} \tag{20}$$

besitzen, wobei der Querstrich auf die konjugiert komplexe Lösung hinweist, ergibt sich folgendes:

Aus (17) bekommen wir mit (20), wenn wir die nun komplexen Konstanten X_n mit α_n bezeichnen

$$x = \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \bar{\alpha}_1 e^{\bar{p}_1 t} + \bar{\alpha}_2 e^{\bar{p}_2 t} \tag{21}$$

Entsprechendes gilt für y. Für die folgende Rechnung schreiben wir die Konstanten α_n in der Form:

$$\alpha_n = A_n e^{i\delta n} \qquad \bar{\alpha}_n = A_n e^{-i\delta n} \qquad n = 1,2 \tag{22}$$

(22) in (21) eingesetzt

$$x = A_1 e^{i\delta_1} \cdot e^{p_1 t} + A_1 e^{-i\delta_1} e^{\bar{p}_1 t} + A_2 e^{i\delta_2} e^{p_2 t} + A_2 e^{-i\delta_2} e^{\bar{p}_2 t}$$

$$x = e^{\varrho t} \cdot 2A_1(\cos\omega t \cos\delta_1 - \sin\omega t \sin\delta_1) + e^{-\varrho t} \cdot 2A_2 (\cos\omega t \cos\delta_2 - \sin\omega t \sin\delta_2)$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme und mit $A_n^* = 2A_n$ wird hieraus

$$x = A_1^* e^{\varrho t} \cos(\omega t + \delta_1) + A_2^* e^{-\varrho t} \cos(\omega t + \delta_2) \tag{23a}$$

Ähnliche Überlegungen führen für y auf die Lösung

$$y = k_1 A_1^* e^{\varrho t} \cos(\omega t + \varepsilon_1) + k_2 A_2^* e^{-\varrho t} \cos(\omega t + \varepsilon_2) \tag{23b}$$

ß) Die Ermittlung der Eigenvektoren und der Eigenrichtungen

Fallen Kraft- und Verschiebungsvektor in dieselbe Richtung, so wird diese Richtung als Eigenrichtung bezeichnet. Eine Eigenrichtung ist gegeben durch ihren zugehörigen Eigenvektor. In unserem Beispiel a) erhalten wir solche Richtungen durch den Ansatz:

$$c_{xx}x + c_{xy}y + a_x x + b_x y = \lambda x$$

$$c_{yy}y + c_{yx}x + a_y x + b_y y = \lambda y$$

Oder

$$(c_{xx} + a_x - \lambda)x + (c_{xy} + b_x)\, y = 0$$

$$(c_{yx} + a_y)\, x + (c_{yy} + b_y - \lambda)\, y = 0 \qquad (24)$$

Das Gleichungssystem (24) hat dann und nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} c_{xx} + a_x - \lambda & c_{xy} + b_x \\ c_{yx} + a_y & c_{yy} + b_y - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(c_{xx}+a_x-\lambda)\,(c_{yy}+b_y-\lambda) - (c_{yx}+a_y)\,(c_{xy}+b_x) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_{xx}+c_{yy}+a_x+b_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{xx}+c_{yy}+a_x+b_y}{2}\right)^2 - (c_{xx}c_{yy}+c_{yy}a_x+c_{xx}b_y - c_{xy}c_{yx}-c_{yx}b_x-c_{xy}a_y)} \qquad (25)$$

Für die Komponenten des Eigenvektors $\mathfrak{x}_1$ erhalten wir aus (24) mit (25)

$$(c_{xx}+a_x-\lambda_1)\, x_1 + (c_{xy}+b_x)y_1 = 0$$

$$y_1 = -\frac{c_{xx} + a_x - \lambda_1}{c_{xy} + b_x}$$

Mit beliebigem x_1 bekommen wir für den Eigenvektor $\mathfrak{x}_1 = \{x_1;\ y_1\}$

$$\mathfrak{x}_1 = \left\{ x_1;\ -\frac{c_{xx} + a_x - \lambda_1}{c_{xy} + b_x}\, x_1 \right\} \qquad (26)$$

Damit ist auch $\mathfrak{x}_2 = \{x_2;\ y_2\}$ gegeben:

$$\mathfrak{x}_2 = \left\{ x_2;\ -\frac{c_{xx} + a_x - \lambda_2}{c_{xy} + b_x}\, x_2 \right\} \qquad (27)$$

mit ebenfalls beliebigem x_2. Damit sind die Eigenvektoren bestimmt.

b) Einstechdrehen

Der in der Literatur fast ausschließlich behandelte Spezialfall befasst sich mit der Berechnung der Ratterschwingungen beim Einstechdrehen. Es werden bei dieser Betrachtungsweise nur solche Bewegungen des Schwingungssystems erfaßt, die in der Orthogonalschnittebene (x, z-Ebene) liegen. Werden auch etwaige Schwingungen des Systems Werkzeug vernachlässigt, was bei kleineren und mittleren Maschinen erlaubt ist, so gilt zunächst:

$$y_1 = 0$$
$$x_2 = 0 \qquad y_2 = 0 \qquad z_2 = 0 \tag{28}$$

Da beim orthogonalen Schnittprozeß die Spanbreite konstant bleibt, ist ferner auch:

$$b_x = 0 \qquad b_z = 0 \tag{29}$$

Mit den Bedingungen (28) und (29) erhalten wir aus (7) das für den Fall des Einstechdrehens gültige Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c_{xx}x + c_{xz}z + a_x x &= 0 \\ m\ddot{z} + c_{zz}z + c_{zx}x + a_z x &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Der Index 1 kann jetzt vernachlässigt werden, da ja vorausgesetzt worden war, daß nur das System Werkstück Bewegungen ausführt.

Mit dem Lösungsansatz

$$x = X\, e^{pt} \qquad z = Z\, e^{pt} \tag{31}$$

erhalten wir aus (30)

$$\begin{aligned} (mp^2 + c_{xx} + a_x)\, X + c_{xz} Z &= 0 \\ (c_{zx} + a_z)\, X + (mp^2 + c_{zz})\, Z &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Auch hier muß wiederum gelten:

$$\begin{vmatrix} mp^2 + c_{xx} + a_x & c_{xz} \\ c_{zx} + a_z & mp^2 + c_{zz} \end{vmatrix} = 0$$

$$(mp^2 + c_{xx} + a_x)(mp^2 + c_{zz}) - c_{xz}(c_{zx} + a_z) = 0$$

Die charakteristische Gleichung erhält also folgendes Aussehen:

$$p^4 + \frac{1}{m}\,(c_{xx} + c_{zz} + a_x)\,p^2 + \frac{1}{m^2}\,(c_{xx}c_{zz} + c_{zz}a_x - c_{xz}c_{zx} - c_{xz}a_z) = 0$$

$$p^2 = -\frac{c_{xx}+c_{zz}+a_x}{2\,m} \pm \sqrt{\frac{(c_{xx}+c_{zz}+a_x)^2}{4\,m^2} - \frac{1}{m^2}\,(c_{xx}c_{zz}+c_{zz}a_x-c_{xz}c_{zx}-c_{xz}a_z)}$$

Sollte sich bei einer zahlenmäßigen Berechnung herausstellen, daß die Größen c_{xz} und c_{zx} klein gegenüber den übrigen Konstanten sind, so können sie vernachlässigt werden. Diese Vernachlässigung würde zur Folge haben, daß die Grenze der dynamischen Stabilität früher als mit Berücksichtigung dieser Glieder erreicht werden würde. Dadurch befinden wir uns bei einer Schwingungsrechnung auf jeden Fall auf der sicheren Seite.

Eine weitere Betrachtung und Diskussion erübrigt sich, weil dieser Sonderfall eingehend in der Literatur behandelt wird /6/ S.53; /14/ S.343.

c) Längsdrehen (System Werkstück 3 Freiheitsgrade, System Werkzeug starr, mit Berücksichtigung der Dämpfung, Abhängigkeit der Schnittkraft von der Schnittgeschwindigkeit)

Diese Betrachtungen sind auf solche Drehmaschinen bzw. Einspannarten anwendbar, bei denen die axiale Bewegungskomponente nicht vernachlässigbar ist. Wollen wir die im Schwingungssystem vorhandene Dämpfung und die Abhängigkeit der Schnittkraft von der Schnittgeschwindigkeit berücksichtigen, so müssen wir das Gleichungssystem (7) ergänzen.
Statt der Abhängigkeit (1) gilt nun:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}\,(x, y, \dot{z}) \qquad (33)$$

Wir entwickeln die Funktion (33), wo $\dot{z} = v$ ist, nach Taylor.

Alle Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, werden vernachlässigt. Wie oben ergibt sich dann:

$$\mathcal{P}(x,y,\dot{z}) = \mathcal{P}\Big|_{\substack{x=a\\y=3\\\dot{z}=v}} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=3\\\dot{z}=v}}(x_2-x_1) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=3\\\dot{z}=v}}(y_2-y_1) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{z}}\Big|_{\substack{x=a\\y=3\\\dot{z}=v}}(z_2-z_1)$$

Es gilt also hier:

$$\mathcal{P}_w = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}\Big|_{\substack{x=a\\y=3\\\dot{z}=v}}(x_2-x_1) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}\Big|_{\substack{x=a\\y=3\\\dot{z}=v}}(y_2-y_1) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{z}}\Big|_{\substack{x=a\\y=3\\\dot{z}=v}}(\dot{z}_2-\dot{z}_1)$$

$$\mathcal{P}_w = \mathfrak{a}(x_2-x_1) + \mathfrak{b}(y_2-y_1) + \vartheta(\dot{z}_2-\dot{z}_1)$$

Hierin ist $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch (3) und (4) gegeben. Dagegen ist

$$\mathfrak{d} = \{- d_x; - d_y; - d_z\}$$

mit

$$d_x = \frac{\partial P_x}{\partial \dot{z}}\Big|_{\substack{x=a\\y=b\\\dot{z}=\nu}} = \frac{\partial P}{\partial \dot{z}}\Big|_{\substack{x=a\\y=b\\\dot{z}=\nu}} \cdot \cos\alpha$$

$$d_y = \frac{\partial P_y}{\partial \dot{z}}\Big|_{\substack{x=a\\y=b\\\dot{z}=\nu}} = \frac{\partial P}{\partial \dot{z}}\Big|_{\substack{x=a\\y=b\\\dot{z}=\nu}} \cdot \cos\beta$$

$$d_z = \frac{\partial P_z}{\partial \dot{z}}\Big|_{\substack{x=a\\y=b\\\dot{z}=\nu}} = \frac{\partial P}{\partial \dot{z}}\Big|_{\substack{x=a\\y=b\\\dot{z}=\nu}} \cdot \cos\gamma$$

Die Komponenten des Schnittkraftanteils $\mathfrak{P}_w$ in x,y,z-Richtung ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned} P_{w_x} &= a_x\,(x_2-x_1) + b_x\,(y_2-y_1) - d_x\,(\dot{z}_2-\dot{z}_1) \\ P_{w_y} &= a_y\,(x_2-x_1) + b_y\,(y_2-y_1) - d_y\,(\dot{z}_2-\dot{z}_1) \\ P_{w_z} &= a_z\,(x_2-x_1) + b_z\,(y_2-y_1) - d_z\,(\dot{z}_2-\dot{z}_1) \end{aligned} \tag{34}$$

Wir setzen (34) in das Gleichungssystem (6) ein und erhalten, wenn wir außerdem noch die Dämpfung berücksichtigen:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+r_x\dot{x}_1+c_{xx}x_1+c_{xy}y_1+c_{xz}z_1-a_x(x_2-x_1)-b_x(y_2-y_1)+d_x(\dot{z}_2-\dot{z}_1) &= 0 \\ m_1\ddot{y}_1+r_y\dot{y}_1+c_{yx}x_1+c_{yy}y_1+c_{yz}z_1-a_y(x_2-x_1)-b_y(y_2-y_1)+d_y(\dot{z}_2-\dot{z}_1) &= 0 \\ m_1\ddot{z}_1+r_z\dot{z}_1+c_{zx}x_1+c_{zy}y_1+c_{zz}z_1-a_z(x_2-x_1)-b_z(y_2-y_1)+d_z(\dot{z}_2-\dot{z}_1) &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2+\bar{r}_x\dot{x}_2+k_{xx}x_2+k_{xy}y_2+k_{xz}z_2+a_x(x_2-x_1)+b_x(y_2-y_1)-d_x(\dot{z}_2-\dot{z}_1) &= 0 \\ m_2\ddot{y}_2+\bar{r}_y\dot{y}_2+k_{yx}x_2+k_{yy}y_2+k_{yz}z_2+a_y(x_2-x_1)+b_y(y_2-y_1)-d_y(\dot{z}_2-\dot{z}_1) &= 0 \\ m_2\ddot{z}_2+\bar{r}_z\dot{z}_2+k_{zx}x_2+k_{zy}y_2+k_{zz}z_2+a_z(x_2-x_1)+b_z(y_2-y_1)-d_z(\dot{z}_2-\dot{z}_1) &= 0 \end{aligned}$$

Wenn wir zunächst das System Werkzeug als starr ansehen, können wir setzen

$$x_2 = 0 \qquad y_2 = 0 \qquad z_2 = 0$$

Unter dieser Voraussetzung vereinfacht sich das Gleichungssystem folgendermaßen:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}+r_x\dot{x}+c_{xx}x+c_{xy}y+c_{xz}z+a_xx+b_xy-d_x\dot{z} &= 0 \\ m\ddot{y}+r_y\dot{y}+c_{yx}x+c_{yy}y+c_{yz}z+a_yx+b_yy-d_y\dot{z} &= 0 \\ m\ddot{z}+r_z\dot{z}+c_{zx}x+c_{zy}y+c_{zz}z+a_zx+b_zy-d_z\dot{z} &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Durch das vereinfachte Gleichungssystem (36) werden die Bewegungen des Systems Werkstück mit drei Freiheitsgraden unter der Voraus-

setzung beschrieben, dass die Schnittkraft von der Spanquerschnittsänderung und von der Änderung der Schnittgeschwindigkeit abhängig ist. Die Dämpfung wird berücksichtigt.

Lösungsansatz:

$$x = X\, e^{pt} \qquad y = Y\, e^{pt} \qquad z = Z\, e^{pt}$$

Damit erhalten wir aus (36):

$$(mp^2 + r_x p + c_{xx} + a_x)\, X + (c_{xy} + b_x)\, Y + (c_{xz} - d_x p)\, Z = 0$$

$$(c_{yx} + a_y)\, X + (mp^2 + r_y p + c_{yy} + b_y)\, Y + (c_{yz} - d_y p)\, Z = 0$$

$$(c_{zx} + a_z)\, X + (c_{zy} + b_z)\, Y + (mp^2 + r_z p + c_{zz} - d_z p)\, Z = 0$$

Auch hier muß für nichttriviale Lösungen die Koeffizientendeterminante verschwinden:

$$\begin{vmatrix} mp^2 + r_x p + c_{xx} + a_x & c_{xy} + b_x & c_{xz} - d_x p \\ c_{yx} + a_y & mp^2 + r_y p + c_{yy} + b_y & c_{yz} - d_y p \\ c_{zx} + a_z & c_{zy} + b_z & mp^2 + r_z p + c_{zz} - d_z p \end{vmatrix} \doteq 0 \quad (37)$$

Aus der Determinante kann die charakteristische Gleichung berechnet werden. Da sie sehr unübersichtlich wird, soll auf die Wiedergabe verzichtet werden.

Sollte sich bei einer zahlenmässigen Berechnung ergeben, daß bestimmte Größen in Gleichung (37) sehr klein gegenüber anderen werden, so sind diese kleinen Größen zu vernachlässigen, wodurch unter Umständen eine wesentliche Vereinfachung von (37) erzielt werden kann.

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (37) können nun nach dem Graeffe-Verfahren ermittelt werden /15/, S. 61. Die Berechnung der Wurzeln, die sich nur in einfachen Fällen leicht durchführen läßt, ist für die Beurteilung der Stabilität aber durchaus nicht nötig. Es gibt vielmehr einige Kriterien, die die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung und ihr Vorzeichen benutzen, um eine Aussage über die Stabilität zu machen. Zwei sehr bekannte Stabilitätskriterien stammen von Routh und Hurwitz. Wir beschränken uns hier auf den Hinweis auf das Deter-

minantenkriterium von Hurwitz /15/, S. 80.

Dieses fordert für Stabilität, wenn die algebraische Gleichung

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_o = 0 \qquad (38)$$

gegeben ist, daß alle a_ν und die Hauptabschnittsdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_o & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_o & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \qquad (39)$$

positiv sein müssen.

Es ist schwer, aus der charakteristischen Gleichung (37) die Einwirkung einzelner Konstanten auf die Stabilität der Bewegung des Schwingungssystems zu beurteilen. Nur wenige Aussagen lassen sich machen. Ist $a_n > 0$, so gilt als notwendige Bedingung für Stabilität auch:

$$a_{n-1} > 0$$

Daraus folgt:

$$a_{n-1} = r_x + r_y + r_z - d_z > 0$$

$$d_z < r_x + r_y + r_z$$

Es muß also auf jeden Fall d_z kleiner als die Summe der Dämpfungskonstanten sein. Aus

$$a_{n-2} > 0$$

folgt

$$m\,(c_{xx} + c_{yy} + c_{zz} + a_x + b_y) > (r_x + r_z)d_z - (r_x r_y + r_y r_z + r_x r_z)$$

Es ist offensichtlich, daß eine solche Betrachtungsweise nicht weiterführt, weil der Aufbau der Koeffizienten immer komplizierter wird. Es erscheint daher wenig sinnvoll, den Einfluß der in den Koeffizienten enthaltenen Konstanten auf die Stabilität unter Benutzung der charakteristischen Gleichung abzuschätzen. Dagegen erhebt sich nun die Frage, ob es nicht möglich ist, schon über die Elemente der charakteristischen Determinante (37) Rückschlüsse

auf die Stabilität zu ziehen. Weil die Determinante aber aus den Elementen bestimmter Matrizen besteht, die dem vorliegenden Problem zugeordnet sind, wollen wir im folgenden untersuchen, ob die Möglichkeit gegeben ist, mit Hilfe dieser Matrizen eine Aussage über die Stabilität zu treffen.

6. Selbsterregte Drehschwingungen

Sind neben translatorischen Ratterschwingungen auch selbsterregte Drehschwingungen von Bedeutung, so ist ein neues Gleichungssystem aufzustellen. Den Ausgangspunkt hierfür bilden die Schwingungsgleichungen des starren Körpers mit 6 Freiheitsgraden /4/, S. 151, /3/, S. 35, die vereinfacht und durch die Schnittkräfte ergänzt werden müssten. Dies soll in der vorliegenden Arbeit nicht mehr durchgeführt werden.

II. Die Klassifikation der Bewegungsvorgänge hinsichtlich der Stabilität.

Die vollständige Klassifikation der Bewegungsvorgänge gelingt mit Hilfe der Elementarteilertheorie. Eine solche Einteilung ergibt bei Beschränkung auf positiv definite Energien für gedämpfte Schwingungssysteme mit einem Freiheitsgrad 3, für zwei Freiheitsgrade aber bereits 14 verschiedene Bewegungsvorgänge. Es ist offensichtlich, daß sich die Anzahl der möglichen Bewegungstypen mit dem Anwachsen der Freiheitsgrade rasch vergrößert /8/, S. 16 ff. und S.24 ff. Die Klassifikation der Bewegungsvorgänge mit Hilfe der Elementarteiler beruht im Grunde auf der Klassifizierung der Matrizen des Gleichungssystem, das für die Bewegungen des betrachteten mechanischen Gebildes massgebend ist.

Bei Benutzung eines von Falk /2/, S. 436 angegebenen Verfahrens, das jedoch nur die wesentlich verschiedenen Fälle berücksichtigt (die Mehrfachheit von Eigenwerten wird nicht beachtet), gelingt eine einfache Klassifizierung der Bewegungsvorgänge dagegen auch bei Schwingungssystemen bis zu n Freiheitsgraden. Dabei werden nur 5 verschiedene Bewegungstypen unterschieden.

Da bei diesem Vorgehen die Matrizenschreibweise benutzt wird, wollen wir im nächsten Abschnitt einige grundsätzliche Bemerkungen hierzu machen.

1. Einführung der Matrizenschreibweise

Durch die Benutzung der Matrizenschreibweise vereinfacht sich z.B. das Differentialgleichungssystem (9) in folgender Weise:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{xx} + a_x & c_{xy} + b_x \\ c_{yx} + a_y & c_{yy} + b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad (40)$$

$$\mathfrak{A}\ddot{\mathfrak{y}} + \mathfrak{L}\mathfrak{y} = 0 \qquad (41)$$

Dementsprechend können wir statt (30) schreiben:

$$\mathfrak{A}\ddot{\mathfrak{y}} + \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{y}} + \mathfrak{L}\mathfrak{y} = 0 \qquad (42)$$

Wir bezeichnen in (41) bzw. (42) $\mathfrak{A}$ als Massen- oder Trägheitsmatrix, $\mathfrak{B}$ als Dämpfungsmatrix und $\mathfrak{L}$ als Federmatrix. Vergleichen wir beispielsweise (42) mit (30), so erkennen wir, daß diese Matrizen das Koeffizientenschema des Gleichungssystems darstellen.

Matrizen lassen sich in verschiedene Klassen einteilen, die hinsichtlich ihrer Eigenschaften Unterschiede aufweisen. Eine für die Anwendungen wichtige Gruppe von Matrizen wird zur Klasse der diagonalähnlichen Matrizen zusammengefasst, die sich dadurch auszeichnet, dass jede zu ihr gehörige n-reihige Matrix n linear unabhängige Eigenvektoren besitzen muß. Diese Bedingung ist übrigens beim Auftreten k_i -facher Eigenwerte λ_i auch dann noch erfüllt, wenn die charakteristische Matrix den vollen Rangabfall $d_i = k_i$ aufweist.

Zur Klasse der diagonalähnlichen Matrizen gehören als normale Matrizen neben anderen auch die reell symmetrischen Matrizen. Aber auch jede nichtsymmetrische Matrix, die die oben erwähnte Bedingung erfüllt (n-reihige Matrix, n linear unabhängige Eigenvektoren), gehört zu den diagonalähnlichen Matrizen. Wir wollen in folgenden untersuchen, welchen Einfluß die Symmetrie bzw. Nichtsymmetrie der Matrizen auf die Bewegungsvorgänge ausübt.

2. Das Eigenwertproblem und die Klassifikation der Bewegungsvorgänge hinsichtlich der Stabilität

Mit dem Lösungsansatz

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}\, e^{pt} \qquad (43)$$

($\mathfrak{x}$ sei z.B. komplex) geht (42) in ein homogenes lineares Gleichungssystem über:

$$(\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}p + \mathcal{C})\varphi = 0 \tag{44}$$

Die Matrizen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sollen hier quadratisch, sonst aber beliebig sein. Von $\mathcal{A}$ wird zusätzlich verlangt, dass es positiv definit ist. Durch Linksmultiplikation mit dem konjugiert komplexen transponierten Vektor $\bar{\varphi}'$ erhalten wir aus (44)

$$\bar{\varphi}'\mathcal{A}\varphi p^2 + \bar{\varphi}'\mathcal{B}\varphi p + \bar{\varphi}'\mathcal{C}\varphi = 0 \tag{45}$$

Nach den über die Matrix $\mathcal{A}$ gemachten Voraussetzungen dürfen wir nun die Gleichung (45) durch $\bar{\varphi}'\mathcal{A}\varphi$ dividieren:

$$p^2 + \frac{\bar{\varphi}'\mathcal{B}\varphi}{\bar{\varphi}'\mathcal{A}\varphi} p + \frac{\bar{\varphi}'\mathcal{C}\varphi}{\bar{\varphi}'\mathcal{A}\varphi} = 0 \tag{46}$$

$$p^2 + ap + b = 0 \tag{47}$$

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \tag{48}$$

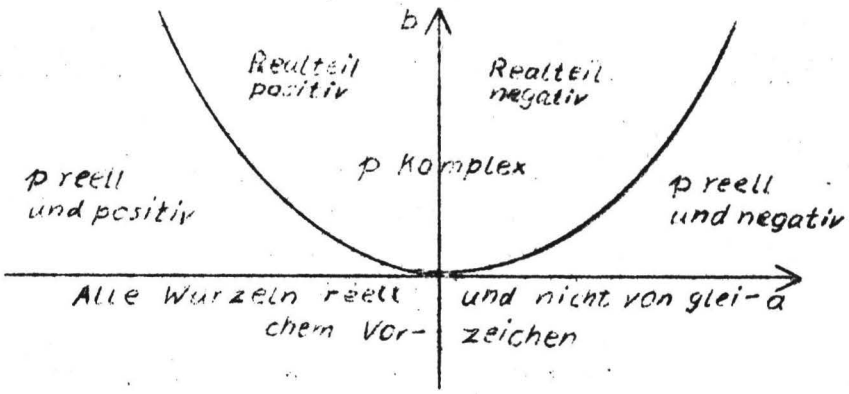
wobei mindestens eine der beiden Wurzeln $p_{1,2}$ der zugehörige Eigenwert des Problems ist. In (47) sind a und b die Rayleighschen Quotienten der Matrizenpaare $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}, \mathcal{C}$. p kann reell oder komplex werden, wobei der Realteil positives oder negatives Vorzeichen haben kann. Die Bewegungen des betrachteten Schwingungssystems sind dementsprechend instabil bzw. stabil, oszillatorisch oder monoton (kriechend).

a) reell symmetrische Matrizen

Wir beschränken uns zunächst auf reell symmetrische Matrizen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Bei reellem φ gilt in (46) $\bar{\varphi}' = \varphi'$. Dann sind a und b stets reell, wie weiter unten noch gezeigt wird. Aus (48) ist ersichtlich, daß die Grenze der oszillatorisch ablaufenden Bewegungen gegeben ist durch die Bedingung

$$b = \frac{a^2}{4}$$

Durch diese Gleichung wird im a, b-Schaubild eine Parabel beschrieben. Durch sie und durch die Koordinatenachsen können insgesamt fünf verschiedene Bewegungstypen in dem genannten Schaubild gegeneinander abgegrenzt werden /16/, S.431; /2/ S. 437.



Sind die Werte a_i, b_i bekannt, so kann aus dem Schaubild sofort auf die Stabilität der Bewegung geschlossen werden. Sie sind aber erst dann bekannt, wenn die Eigenvektoren $\mathfrak{x}_i$ als Lösung von (44) gegeben sind. Kennen wir die $\mathfrak{x}_i$ nicht, so lassen sich durch Bestimmung der größten und kleinsten Eigenwerte, jeweils für die Matrizenpaare $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{L}$ ermittelt, Grenzen angeben, in denen die a_i und b_i liegen /9/, S. 206. Die Lage des eingegrenzten Wertebereiches im a,b-Schaubild läßt dann Rückschlüsse auf die Stabilität der Bewegungen des betrachteten Schwingungssystems zu.

α) Grundsätzliche Betrachtungen über die Eigenwerte und ihr Vorzeichen

Wenden wir uns nun den Eigenwerten reell symmetrischer Matrizen zu. Dabei werden zunächst die Eigenwerte einer Matrix betrachtet. Dann gehen wir über zur Untersuchung der Eigenwerte von zwei bzw. drei Matrizen. Es gilt:

Satz 1: Eine reell symmetrische Matrix hat stets reelle Eigenwerte λ_i.

Dieser Satz läßt sich folgendermaßen beweisen. Für $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ und eine zunächst beliebige quadratische Matrix $\mathfrak{L}$ und einen z.B. komplexen Vektor $\mathfrak{x}$ erhalten wir aus (46) den Rayleighschen Quotienten:

$$R = p^2 = \lambda = -\frac{\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{L}\mathfrak{x}}{\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{x}} \tag{49}$$

Hierin ist der Nenner stets positiv reell. Für den Zähler erhalten wir, wenn wir die Aufspaltung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u} + i\,\mathfrak{v}$$
$$\bar{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{u} - i\,\mathfrak{v}$$

benutzen

$$\bar{\varphi}'\mathcal{L}\varphi = (w' - i\,u')\mathcal{L}(u + i\,w) = (w' - i\,u')(\mathcal{L}u + i\mathcal{L}w)$$

$$\bar{\varphi}'\mathcal{L}\varphi = u'\mathcal{L}u + w'\mathcal{L}w + i(u'\mathcal{L}w - w\mathcal{L}u) \tag{50}$$

Der Klammerausdruck in (50) verschwindet aber für reell symmetrische Matrizen, d.h. es ist:

$$u'\mathcal{L}w = w'\mathcal{L}u \tag{51}$$

R ist also stets reell. Damit sind auch die Eigenwerte λ_i, die ja aus dem Rayleighschen Quotienten für Eigenvektoren φ_i berechnet werden können, immer reell.

Sollen über das Vorzeichen des Eigenwertes Aussagen gemacht werden, was für die Stabilität der Bewegungen von Bedeutung ist, so müssen an die Eigenschaften der Matrix $\mathcal{L}$ weitere Forderungen gestellt werden. Es gilt:

Satz 2: Ist eine reell symmetrische Matrix positiv definit oder semidefinit /4/, S. 202, so sind ihre Eigenwerte negativ reell oder nicht positiv.

Für die Eigenvektoren läßt sich folgender Satz formulieren:

Satz 3: Die Eigenvektoren einer reell symmetrischen Matrix, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind reell und zueinander orthogonal ($\varphi_i' \cdot \varphi_k = 0$).

Der Beweis für Satz 3 ist leicht zu führen. Aus dem Ansatz der Eigenwertgleichungen für zwei verschiedene Eigenwerte folgt nämlich, wenn die zweite Gleichung in transponierter Form aufgestellt wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\varphi_k &= \lambda_k \varphi_k \quad \Big| \cdot \varphi_i' \\ \varphi_i'\mathcal{L} &= \lambda_i \varphi_i' \quad \Big| \cdot \varphi_k \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i'\mathcal{L}\varphi_k &= \lambda_k \varphi_i' \\ \varphi_i'\mathcal{L}\varphi_k &= \lambda_i \varphi_i'\varphi_k \end{aligned}\right\} -$$

$$(\lambda_k - \lambda_i)\varphi_i'\varphi_k = 0$$

Nach Voraussetzung war $\lambda_k \neq \lambda_i$, so dass $\varphi_i'\varphi_k = 0$ gefordert werden muß, um diese Gleichung zu erfüllen. Diese Forderung entspricht aber der in Satz 3 angegebenen Orthogonalität.

Wir gehen nur zur Betrachtung des Eigenwertproblems eines Matrizenpaares $\mathfrak{A}, \mathfrak{L}$ über. Beide Matrizen sollen reell symmetrisch sein. Es gilt:

Satz 4: Sind in der allgemeinen Eigenwertaufgabe $(\mathfrak{L} + \lambda \mathfrak{A})\varphi = 0$ die beiden n-reihigen Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}$ reell symmetrisch, ist ferner $\mathfrak{A}$ nichtsingulär (also $\det \mathfrak{A} \neq 0$) und entweder $\mathfrak{L}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{A}$ positiv definit, so sind sämtliche n Eigenwerte $\lambda_i = p_i^2$ reell. Ist $\mathfrak{L}$ außerdem positiv definit oder semidefinit, dann sind alle Eigenwerte λ_i negativ bzw. nicht positiv. Es gibt ferner n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren. Zu jedem Eigenvektor gehört eine Eigenrichtung. Die Eigenvektoren sind zueinander orthogonal. Durch Normierung entstehen aus den n Eigenvektoren n ebenfalls orthogonale Einheitsvektoren, die das sogenannte Hauptachsensystem bilden.

Wir setzen nun die Matrix $\mathfrak{B} \neq 0$ voraus, und es möge das Eigenwertproblem in Form der Gleichung (44) vorliegen. Dann gilt:

Satz 5: Sind in der Eigenwertaufgabe $(\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}p + \mathfrak{L})\varphi = 0$ die Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}$ reell symmetrisch und positiv definit, so sind die Eigenwerte p_i reell oder komplex. Die Realteile haben stets negatives Vorzeichen.

Dieses Ergebnis ist aus (48) abzulesen. Diese und weitere Fälle fassen wir weiter unten in einer Tabelle zusammen. Wenden wir uns jetzt den Eigenwerten nichtsymmetrischer quadratischer Matrizen zu.

b) nichtsymmetrische quadratische Matrizen

Bei Betrachtung von (40) erkennen wir, daß die Matrix $\mathfrak{L}$ unseres Problems zu dieser Gruppe von Matrizen gehört.

Wir betrachten zuerst wiederum ausgehend von Gleichung (44) den Fall, dass $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ ist. $\mathfrak{L}$ ist nun nichtsymmetrisch, aber quadratisch. Es ist offenbar, daß jetzt die Eigenwerte λ_i zwar reell sein können, es jedoch durchaus nicht sein müssen. Dementsprechend ist auch R reell oder komplex.

Bei der Benutzung des Rayleighschen Quotienten in der Form (49) ist bei nichtsymmetrischen Matrizen einige Vorsicht geboten. Wird in (49) für φ der Eigenvektor eingesetzt, so ergibt diese Gleichung sowohl bei reell symmetrischen als auch bei nicht-

symmetrischen quadratischen Matrizen $\mathfrak{L}$ den exakten Eigenwert λ. Ist dagegen $\mathfrak{x}$ nur eine Näherung für den Eigenvektor, so erhalten wir aus (49) im Falle einer reell symmetrischen Matrix eine gute Näherung für den Eigenwert. Im Falle einer nichtsymmetrischen Matrix muß (49) weder eine besonders gute Näherung für den Eigenwert liefern, noch ist etwas über das Fehlervorzeichen bekannt, aus dem zu schließen wäre, ob wir uns dem Eigenwert von oben oder unter her nähern.

Für nichtsymmetrische diagonalähnliche Matrizen gilt daher der Rayleighsche Quotient in verallgemeinerter Form:

$$R = -\frac{\mathfrak{z}' \mathfrak{L} \mathfrak{x}}{\mathfrak{z}' \mathfrak{x}} = \lambda , \tag{52}$$

wenn $\mathfrak{z}$ ein Linkseigenvektor und $\mathfrak{x}$ ein Rechtseigenvektor ist. Die Gleichung (49) erscheint nun als Spezialfall von (52), da bei symmetrischer Matrix Links- und Rechtseigenvektoren zusammenfallen.

α) Grundsätzliche Betrachtungen über die Eigenwerte und ihr Vorzeichen

Für die Eigenwerte und Eigenvektoren nichtsymmetrischer quadratischer Matrizen gilt folgender Satz:

Satz 6: Eine beliebige n-reihige quadratische Matrix hat genau n reelle oder komplexe Eigenwerte λ_i. Zu jedem einfachen Eigenwert gibt es einen linear unabhängigen Eigenvektor und damit eine Eigenrichtung. Gilt bei mehrfachen Eigenwerten für den Rangabfall $d_i = k_i$, so sind trotz k_i-facher Eigenwerte insgesamt n linear unabhängige Eigenvektoren vorhanden. Zu einem k_i-fachen Eigenwert existieren aber mindestens ein und höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren. Die Eigenvektoren sind allgemein nicht mehr orthogonal zueinander.

Der Satz 6 macht keine Aussagen über das zu erwartende Vorzeichen der reellen oder der Realteile der komplexen Eigenwerte. Wodurch das Vorzeichen beeinflusst wird, zeigen wir mit Hilfe des Rayleighschen Qotienten (49).

Jede quadratische nichtsymmetrische Matrix läßt sich nämlich in die Summe aus einem symmetrischen und einem schiefsymmetri-

schen (= antimetrischen) Anteil aufspalten:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_A \tag{53}$$

In (53) ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S &= \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}') \\ \mathcal{L}_A &= \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}') \end{aligned} \tag{54}$$

Mit (53) erhalten wir aus (49):

$$R = \lambda = p^2 = -\frac{\bar{\mathfrak{e}}'\mathcal{L}\mathfrak{e}}{\bar{\mathfrak{e}}'\mathfrak{e}} = -\frac{\bar{\mathfrak{e}}'(\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_A)\mathfrak{e}}{\bar{\mathfrak{e}}'\mathfrak{e}}$$

und damit auch /9/, S.20 :

$$R = -\left(\frac{\bar{\mathfrak{e}}'\mathcal{L}\mathfrak{e}}{\bar{\mathfrak{e}}'\mathfrak{e}} + \frac{\bar{\mathfrak{e}}'\mathcal{L}_A\mathfrak{e}}{\bar{\mathfrak{e}}'\mathfrak{e}}\right) = -(R_S + R_A) \tag{55}$$

Der Rayleighsche Quotient ist mit (55) also ebenfalls in einem symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil aufgespalten worden. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1) reelle Eigenwerte λ_i, reelle Eigenvektoren $\mathfrak{e}_i$
2) komplexe Eigenwerte λ_i; komplexe Eigenvektoren $\mathfrak{e}_i$

Setzen wir den zum Eigenwert $p_i = \sqrt{\lambda_i}$ gehörenden Eigenvektor im Fall 1 in (55) ein, so zeigt sich, dass stets $R_A = 0$ ist. Daraus folgt, daß für das Vorzeichen des Eigenwertes nur die Eigenschaften des symmetrischen Anteiles $\mathcal{L}_S$ der Matrix $\mathcal{L}$ maßgebend sind.

Setzen wir im Fall 2 den komplexen Eigenvektor in (55) ein, so entsteht der Realteil des komplexen Eigenwertes aus dem symmetrischen Anteil $\mathcal{L}_S$ und der Imaginärteil aus dem schiefsymmetrischen Anteil $\mathcal{L}_A$ der Matrix $\mathcal{L}$, so daß auch hier zur Beantwortung der Vorzeichenfrage nur die Eigenschaften des symmetrischen Anteils der Matrix $\mathcal{L}$ herangezogen zu werden brauchen.

Da bei komplexen Eigenwerten λ_i wegen $p_i = \sqrt{\lambda_i}$ stets komplexe Lösungen mit positivem Realteil auftreten, braucht beim Vorliegen komplexer λ_i im Falle der Matrix $\mathcal{L}$ die Untersuchung nicht weitergeführt zu werden, weil dann stets ein instabiler Fall vorliegt. Wichtig für die Vorzeichenfrage ist hier also in erster Linie die Entscheidung, ob komplexe oder reelle λ_i auftreten.

Ob sich aufbauend auf diesen Gedanken über die Wurzeln und ihr Vorzeichen weitere Aussagen machen lassen, müsste durch eingehendere Untersuchungen geklärt werden. Teilweise sind solche Untersuchungen schon von Routh durchgeführt worden /9/, S.236 ff. Wir stellen seine und weitere Ergebnisse in der nachfolgenden Tabelle zusammen, wobei wir wiederum beachten, daß sich reell quadratische Matrizen stets in eine Summe aus symmetrischem und schiefsymmetrischem Anteil aufspalten lassen. Es ist also:

$$\mathcal{A}\ddot{\mathfrak{y}} + \mathcal{B}\dot{\mathfrak{y}} + \mathcal{C}\mathfrak{y} = 0$$

$$(\mathcal{A}_S + \mathcal{A}_A)\ddot{\mathfrak{y}} + (\mathcal{B}_S + \mathcal{B}_A)\dot{\mathfrak{y}} + (\mathcal{C}_S + \mathcal{C}_A)\mathfrak{y} = 0$$

Tabelle 3

Symmetrische Anteile			Schiefsymmetrische Anteile			Charakteristische Wurzeln	Stabilität
$\mathcal{A}_S$	$\mathcal{B}_S$	$\mathcal{C}_S$	$\mathcal{A}_A$	$\mathcal{B}_A$	$\mathcal{C}_A$	$p = \sqrt{\lambda} = \varrho \pm i\sigma$	
PD	C	PD	0	0	0	$\varrho = 0$	stabil
PD	0	PSD	0	0	0		
PD	PD	PD	0	0	0	$\varrho < 0$	stabil
PD	PSD	PSD	0	0	0	$\varrho \leqq 0$	
PD	0	ND	0	0	0	$p = \pm$ reell	
PD	ND	PD	0	0	0	$p =$ reell oder komplex $\varrho > 0$	
PD	0	PD	0	bel	0	$\varrho = 0$	stabil
PD	PD	PD	0	bel	0	$\varrho < 0$	
PD	PD	PD	0	0	bel	$\varrho < 0$ oder $\varrho < \sigma$	
PD	PD	PD	bel	0	0		
PD	0	PD	bel	bel	bel	p nicht reell	
PD	PD	PD	bel	bel	bel	p nicht pos. reell und $p \neq 0$	

Tabelle 4

Symmetrische Anteile $\mathcal{A}_S$	$\mathcal{B}_S$	$\mathcal{C}_S$	Schiefsymmetrische Anteile $\mathcal{A}_A$	$\mathcal{B}_A$	$\mathcal{C}_A$	Eigenwerte $\lambda = p^2$	Stabilität
PD	0	ND	0	0	bel	λ pos. reell λ kompl. mit pos. Realt.	instabil
PD	0	PD	0	0	bel	λ neg. reell λ kompl. mit neg. Realt.	stabil
PD	0	IND	0	0	bel	λ neg. reell λ pos. reell λ kompl. mit neg. od. pos. Realteil	stabil instabil
PD	0	PSD	0	0	bel	λ neg. reell kompl. mit neg. Realt.	stabil
PD	0	NSD	0	0	bel	λ pos. reell λ kompl. mit pos. Realt.	instabil

In den Tabellen bedeuten:

ND .... negativ definit
PSD .... positiv semidefinit
0 ..... verschwindende Matrix
PD .... positiv definit
bel .... beliebig
usw.

Anhand der Tabellen wird es in vielen Fällen leicht sein, Rückschlüsse auf die Stabilität der Bewegung zu ziehen, ohne die charakteristische Gleichung oder ihre Wurzeln berechnen zu müssen. Trotzdem sind ihre Angaben zur vollständigen Klassifikation der Bewegungsvorgänge nicht ausreichend, so daß noch Untersuchungen darüber durchgeführt werden müssten, ob eine weitere Spezialisierung möglich ist.

ß) Anwendung des Verfahrens von FALK auf nichtsymmetrische Matrizen

Ein anderer Weg, der bei der Klassifizierung der hier besonders interessierenden Fälle, die auf nichtsymmetrische diagonalähnliche Matrizen führen, beschritten werden kann, besteht in der Erweiterung des Verfahrens von FALK.

Da bei Rattererscheinungen an Drehbänken, wenn die Abhängigkeit der Schnittkraft von der Schnittgeschwindigkeit vernachlässigbar ist, nur die Matrix $\mathcal{L}$ nichtsymmetrisch wird, wollen wir uns auf die Betrachtung dieses Falles beschränken.

Wir setzen voraus, daß in (46) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ reell symmetrisch und $\mathfrak{A}$ außerdem noch positiv definit sei. $\mathcal{L}$ soll dagegen nur reell quadratisch sein. Dann müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1) b ist in (47) reell
2) b ist in (47) komplex

Nach unserer Voraussetzung ist a in (47) stets reell (vgl. Satz 4).
Der Fall 1) bringt gegenüber den Betrachtungen bei reell symmetrischen Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathcal{L}$ nichts Neues. Wir gehen daher sofort zum Fall 2) über. Wir schreiben für (48):

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \qquad (56)$$

Nun soll z.B. sein:

$$b = u \pm iv \qquad (57)$$

(57) in (56) gesetzt:

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4u) \pm 4vi} \qquad (58)$$

Die Wurzel aus einer komplexen Zahl ist wiederum eine komplexe Zahl, deren Realteil mit u^* und deren Imaginärteil mit iv^* bezeichnet werden soll. Damit ergibt sich aus (58)

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot (\pm u^* \pm iv^*)$$

Die Zugehörigkeit des Vorzeichens ist dabei jeweils zu prüfen.

Es sei z.B.

$$
\begin{aligned}
p_{1,2} &= -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot (u^* + iv^*) \\
p_1 &= \frac{1}{2}(u^* - a) + i\,\frac{v^*}{2} \\
p_2 &= -\frac{1}{2}(u^* + a) - i\,\frac{v^*}{2}
\end{aligned}
\tag{59}
$$

und es sei etwa p_1 der Eigenwert. Dann erhalten wir als Bedingung für die oszillatorische Stabilitätsgrenze aus (59):

$$u^* - a = 0 \tag{60}$$

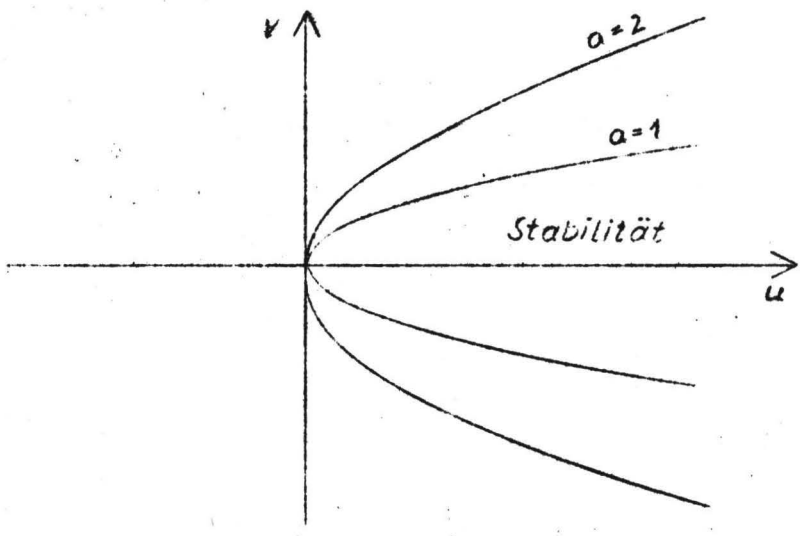
Für u* können wir jedoch mit (58) schreiben:

$$u = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(a^2 - 4u)^2 + (4v)^2} + (a^2 - 4u)\right]} \tag{61}$$

Wenn wir (61) in (60) einsetzen, dan erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$a = \frac{v}{\sqrt{u}} \tag{62}$$

Mit a als Parameter können wir (62) zeichnerisch darstellen.



Der innerhalb der Kurve liegende Bereich ergibt Wurzeln p mit negativem Realteil, also oszillatorische Stabilität. Alle außerhalb liegenden Punkte ergeben Instabilität.

Es bleibt noch zu untersuchen, auf welche Weise die Stabilität bei negativem u in (57) einfach darstellbar ist.

III. Der Einsatz von Analogrechnern zur Berechnung der Stabilität von Drehmaschinen

Die analytische Behandlung der selbsterregten Schwingungen an Drehbänken erfordert einen verhältnismässig großen Aufwand an Rechenarbeit. Nach Beendigung dieser Arbeit, wenn Stabilität oder Instabilität festgestellt worden ist, fehlt die Übersicht über den Einfluß einzelner Parameter auf die Stabilität.

Der Analogrechner /1/ ist dagegen in der Lage, auch bei der Behandlung komplizierter Fälle den Zeitaufwand klein zu halten und die Übersichtlichkeit zu wahren. Es ist daher naheliegend, den Analogrechner zur Stabilitätsuntersuchung von Drehmaschinen heranzuziehen.

Programmierung

Die Rechnung wurde auf dem elektronischen Analogrechner des Heinrich-Hertz-Instituts vom Typ Telefunken RA 463/2 /1/, S.252 durchgeführt, der 32 Integrierverstärker, 8 Umkehrverstärker, 8 Multiplikatoren und 2 Funktionsgeber besitzt.

Die Untersuchung erstreckte sich auf das Gleichungssystem (9) Wir stellen dieses System zur Ermittlung der Maschinengleichungen um:

$$\ddot{x} + \frac{c_{xx} + a_x}{m} x + \frac{c_{xy} + b_x}{m} y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{c_{yy} + b_y}{m} y + \frac{c_{yx} + a_y}{m} x = 0$$

oder

$$\ddot{x} + A\,x + B\,y = 0$$

$$\ddot{y} + C\,y + D\,x = 0 \qquad (63)$$

Die Problemveränderlichen x, y und t müssen nun durch die Maschinenveränderlichen u, v und τ ausgedrückt werden /13/, S. 105 ff. Hierzu benötigen wir die Maßstabsfaktoren $\sigma_{1,2}$ und $\kappa_{1,2}$. Es gilt:

$$u = \sigma_1 x \qquad v = \sigma_2 y$$

$$\tau_1 = \kappa_1 t_1 \qquad \tau_2 = \kappa_2 t_2 \qquad (64)$$

Für die Ableitungen dieser Größen erhalten wir dann:

$$\dot{u} = \frac{du}{d\tau_1} = \frac{du}{dt_1} \cdot \frac{dt_1}{d\tau_1} = \sigma_1 \dot{x} \cdot \frac{1}{\kappa_1} = \frac{\sigma_1}{\kappa_1}\dot{x} \qquad (65)$$

$$\ddot{u} = \frac{\sigma_1}{\kappa_1^2}\ddot{x} \qquad (66)$$

$$\dot{v} = \frac{\sigma_2}{\kappa_2}\dot{y} \qquad \ddot{v} = \frac{\sigma_2}{\kappa_2^2}\ddot{y} \qquad (67)$$

Es wird (65), (66) und (67) in (63) eingesetzt:

$$\frac{\kappa_2^2}{\sigma_2}\ddot{v} + \frac{C}{\sigma_2} v + \frac{D}{\sigma_1} u = 0 \tag{68}$$

$$\frac{\kappa_1^2}{\sigma_1}\ddot{u} + \frac{A}{\sigma_1} u + \frac{B}{\sigma_2} v = 0$$

Hierin soll sein:

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_1} \qquad \alpha' = \frac{1}{\sigma_2} \tag{69}$$

$$\alpha_I = \frac{\kappa_1^2}{\sigma_1} \qquad \alpha'_I = \frac{\kappa_2^2}{\sigma_2}$$

Mit (69) ergibt sich aus (68):

$$\ddot{u} = - A \frac{\alpha}{\alpha_I} u - B \frac{\alpha'}{\alpha_I} v \tag{70}$$

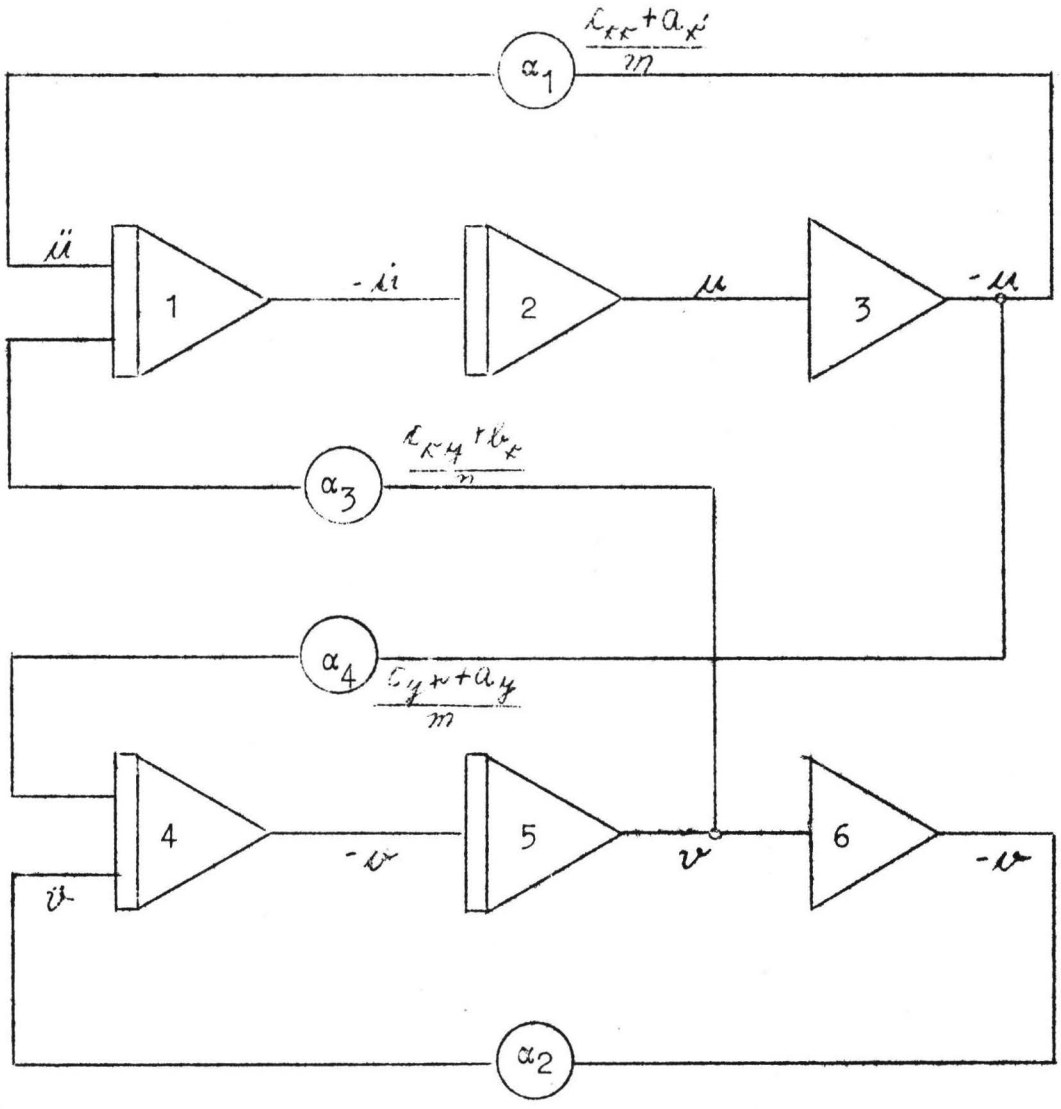
$$\ddot{v} = - C \frac{\alpha'}{\alpha'_I} v - D \frac{\alpha}{\alpha'_I} u$$

Mit (70) sind die Maschinengleichungen gefunden, so daß zunächst die Schaltung des Rechners entworfen werden kann. In der Rechenschaltung werden mit 1, 2, 4 und 5 Integratoren und mit 3 und 6 Umkehrverstärker bezeichnet. Potentiometer, die für die Multiplikation mit konstanten Faktoren erforderlich sind, werden durch Kreise dargestellt.

Nach der Wahl des Weg- und Zeitmaßstabes können die Potentiometereinstellungen ermittelt werden. Wir wollen dies für ein Zahlenbeispiel durchführen. Wir wählen:

$$\kappa_1 = \frac{\tau_1}{t_1} = \frac{1}{3} \qquad \kappa_2 = \frac{1}{3} \tag{71}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \tag{72}$$



Schaltbild für Gleichungssystem (9)

Aus (70) bekommen wir:

$$A \frac{\alpha}{\alpha_I} = A \frac{\sigma_1}{\sigma_1 \kappa_1^2} = \frac{A}{\kappa_1^2} = \frac{\alpha_1}{T_1 T_2} \tag{73}$$

In (73) bedeutet α_1 die Potentiometereinstellung und T_1, T_2 die Integrationszeitkonstante, die zu $T_1 = T_2 = 0{,}1$ sec gewählt wurde. Für die Potentiometereinstellung wird also errechnet:

$$\alpha_1 = T_1 T_2 \cdot \frac{A}{\kappa_1^2} = 0{,}01 \cdot \frac{2{,}3889}{\frac{1}{9}\,m} = \frac{0{,}023889 \cdot 9}{m}$$

Da die Masse m in unserem Beispiel zu 1 $\frac{kp\ sec^2}{m}$ gewählt worden war, ergibt sich:

$$\alpha_1 = 0{,}215001$$

Ebenso berechnet sich:

$$\alpha_2 = 0{,}26523$$

Die Einstellung des nächsten Potentiometers bekommen wir unter Benutzung von (70) aus:

$$B \frac{\alpha'}{\alpha_I} = B \frac{\sigma_1}{\sigma_2 \kappa_1^2} = \frac{B}{K_1^2}$$

$$\frac{B}{\kappa_1^2} = \frac{\alpha_3}{T_1 T_2}$$

$$\alpha_3 = T_1 T_2 \frac{B}{\kappa_1^2} = 0{,}01 \cdot \frac{-0{,}3982}{\frac{1}{9}}$$

$$\alpha_3 = -0{,}035838$$

Und schließlich ergibt sich:

$$D \frac{\alpha}{\alpha'_I} = D \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \kappa_2^2} = \frac{D}{\kappa_2^2}$$

für ein im Verlaufe der Untersuchung durchgerechnetes Beispiel

Die am Sichtgerät des Analogrechners fotografisch aufgenommenen Bilder zeigen, daß ein oszillatorisch instabiler Fall vorliegt. Durch eine Veränderung der Potentiometereinstellungen können wir leicht zu einem stabilen Fall übergehen. Erhöhen wir beispielsweise den Schnittkraftanstieg $\frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\pi \\ y=3}}$ auf 0,4 $\frac{kp}{m}$, so erhalten wir für b_x = 0,06944 kp/m und für b_y = 0,39592 kp/m. Während α_1 und α_4 dieselben Werte wie im vorigen Beispiel behalten, wird nun:

$$\alpha_2 = 0{,}2829528 \qquad \alpha_3 = -\,0{,}0327204$$

Das Sichtgerät des Analogrechners zeigt uns, daß ein oszillatorisch stabiler Fall vorliegt. Dasselbe Ergebnis erhalten wir natürlich bei einer rechnerischen Behandlung der Aufgabe.

An diesem Beispiel wird deutlich, daß der Einfluß einzelner Konstanten und die Tendenz ihrer Einwirkung auf die Stabilität am Analogrechner rasch beurteilt werden kann. Dies ist besonders in solchen Fällen wichtig, in denen infolge ihrer Kompliziertheit eine Beurteilung auf analytischem Wege mit vertretbarem Zeitaufwand unmöglich wird.

IV. Experimentelle Untersuchung selbsterregter Schwingungen an Drehbänken.

Die Schwingungsmessungen wurden an einer Zug- und Leitspindeldrehbank der Firma Gema, St. Ingbert (Saar), Typ DU 40 durchgeführt. Die Maschine besitzt eine Spitzenhöhe von 160 mm, die Spitzenweite beträgt 1000 mm. Die Bank hat eine Antriebsleistung von 3 PS. Das Schwingungsverhalten einer Werkzeugmaschine kann exakt nur während des Zerspanungsprozesses gemessen werden. Bei den Messungen sollten möglichst die Bewegungen von System Werkstück und Werkzeug an der Schnittstelle ermittelt werden. Dies kann in der Praxis nur näherungsweise erreicht werden.

Durch Vorversuche war festgestellt worden, dass bei normaler Auskraglänge des Meißels (ca. 25 mm) die Bewegungen des Systems Werkzeug vernachlässigbar klein waren. Aus diesem Grunde wurden bei den weiteren Versuchen nur die Bewegungen des Systems Werkstück in den Komponenten x, y, z erfaßt.

Zur Messung der Schwingungen wurden die tastlosen Induktivaufnehmer Tr3-5 der Firma Hottinger benutzt. Die Anbringung der Aufnehmer geht aus den Abbildungen hervor. Ein Schwingungsschrieb wurde ebenfalls als Abbildung beigefügt.

Die Bedingungen für den Versuch waren:

Werkstück:

Werkstückstoff: C k 60

Werkzeug:

Drehmeißel ISO 2 R 16q DIN 4972 TT 10
Schneidstoff: Hartmetall Widia TT 10
Schneidengeometrie: Spanwinkel $\gamma = 12^{o}$
Freiwinkel $\alpha = 6^{o}$
Einstellwinkel $\kappa = 45^{o}$
Abrundungsradius $r = 0{,}5$ mm

Schnittbedingungen:

Schnittgeschwindigkeit : $v = 138$ m/min
Vorschub: $s = 0{,}0756$ mm/U
Schnitttiefe: $a = 0{,}8$ mm

Aus dem Schrieb ist ersichtlich, daß die Bewegungen des Systems Werkstück in x- und z-Richtung fast harmonisch sind. Für die y-Komponente gilt diese Feststellung nicht mehr. Zur Beseitigung der Störfrequenzen fehlte für die axiale Komponente, im Gegensatz zu den beiden anderen Komponenten, ein entsprechendes Filter. Die Frequenz der Schwingungen betrug 200 Hz. Eine Phasenverschiebung z.B. zwischen x- und z-Komponente konnte nicht beobachtet werden. Die auf dem Schrieb erkennbare Phasenverschiebung ist durch die verwendeten Filter bedingt, also elektrischer Natur. Irgendein materieller Punkt des Werkstückes bewegte sich also im eingeschwungenen Zustand nicht auf einer elliptischen Bahn sondern auf einer Geraden. Dieses Ergebnis der Messung erscheint darauf zu beruhen, daß die Komponenten x und z an der relativ starren Einspannstelle des Werkstückes im Futter gemessen wurden. Es ist zu vermuten, daß an der Reitstockseite des Werkstückes als Schwingungsbahn die übliche Ellipse /3/, S. 19; /14/, S.502 gemessen worden wäre. Zur Klärung dieser Frage müßten weitere Versuche, insbesondere auch mit Werkstücken unterschiedlicher Steifigkeit, durchgeführt werden.

Die Amplituden der Schwingungen betrugen

$$x = 36\,\mu m \qquad y = 1\,\mu m \qquad z = 12\,\mu m$$

Ein Ergebnis, das sich bei dieser relativ kleinen Maschine und der gewählten Einspannung des Werkstückes erwarten ließ. Bei großen Drehmaschinen sind in Richtung der Werkstückachse (y-Richtung) bedeutend größere Amplituden zu erwarten. Dasselbe ist auch der Fall bei fliegend eingespannten Werkstücken /3/, S.28. Die durchgeführten Versuche zeigen, daß die im ersten Teil dieser Arbeit getroffenen Annahmen, die zur Aufstellung der mathematischen Theorie führten, durchaus vertretbar sind.

V. Zusammenfassung der Ergebnisse

Zur mathematischen Behandlung des Ratterproblems an Drehbänken wurde eine Theorie entwickelt, die sich nicht mehr allein auf den Orthogonalschnittprozess beschränkt. Wegen der Unterschiedlichkeit der möglichen Fälle (verschiedene Drehverfahren, Einspannarten, Werkstücke, Anregungsmechanismen, Maschinentypen) wurde auf eine Ergänzung bzw. Vereinfachung des abgeleiteten Gleichungssystems hingewiesen.

Ziel der Untersuchungen selbsterregter Schwingungen an Drehbänken ist die Vorausberechnung der Stabilitätsgrenze und die Abschätzung des Einflusses einzelner Konstanten auf die Stabilität. Die durchgeführten Betrachtungen haben gezeigt, daß neben der Steifigkeit der Schwingungssysteme insbesondere der Schnittkraftanstieg und die Richtung der Schnittkraft von Bedeutung sind. Eine Vergrößerung des Schnittkraftanstieges muß dabei nicht immer gleichbedeutend mit erhöhter Ratterneigung sein, da die Schnittkraft bei entsprechender Lage auch einen Anstieg der Steifigkeit hervorrufen kann.

Zur Bestimmung der Stabilität wurde erstmals in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß eine Klassifizierung der Bewegungsvorgänge mit Hilfe von Matrizen möglich ist. Es ergab sich bei den hierzu erforderlichen Untersuchungen die interessante Tatsache, daß das Vorzeichen des Realteils der Wurzeln der charakteristischen Gleichung bei nichtsymmetrischen quadratischen Matrizen nur vom symmetrischen, nicht aber vom schiefsymmetrischen Anteil der Matrix abhängig ist.

Zur Berechnung komplizierter Fälle empfiehlt sich die Heranziehung elektronischer Analogrechner. Die Einwirkung einzelner Systemkonstanten auf die Stabilität wird dabei besonders deutlich, so daß sich bei weitergehenden systematischen Untersuchungen Erkenntnisse über die Einflüsse sammeln ließen, die in Sätzen zusammengefaßt werden könnten.

Die an einer mittleren Zug- und Leitspindeldrehbank durchgeführten Versuche bestätigten im wesentlichen die aus der Literatur bekannten Tatsachen.

VI. Literatur

/1/ D. ERNST: Elektronische Analogrechner, Verlag R. Oldenbourg, München 1960

/2/ S. FALK: Klassifikation gedämpfter Schwingungssysteme und Eingrenzung ihrer Eigenwerte, Ingenieur-Archiv 29 (1960). S.436..S.444

/3/ O. GRÜNDLER: Die Hauptschwingungen elastisch gestützter stabförmiger Körper beim Fehlen von Dämpfung, Dissertation an der TH Berlin 1938

/4/ K. KLOTTER: Technische Schwingungslehre, 2. Band, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1960

/5/ H. LYSEN: Der heutige Stand des dynamischen Steifigkeits-Meßverfahrens, Sonderheft zum 3. FOKOMA, Band 2, S. 3...S. 19, Würzburg 1957

/6/ OPITZ, HERWART u. W. HÖLKEN: Untersuchung von Ratterschwingungen an Drehbänken, Forschungsbericht Nr. 533 des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1958

/7/ M. POLACEK: Kritischer Vergleich verschiedener Methoden der Stabilitätsberechnung, Sonderheft zum 4. FOKOMA, Band 2, Würzburg 1959

/8/ W. QUADE: Über die Schwingungsvorgänge in gekoppelten Systemen, Ingenieur-Archiv 6 (1935), S. 15 - S. 34

/9/ E. ROUTH: Die Dynamik der Systeme starrer Körper, 2. Band, Verlag B.G. Teubner, Leipzig 1898

/10/ E. SALJÉ: Die Werkzeugmaschine unter dynamischer Belastung, Zweiter Teil, Industrie-Anzeiger 77 (1955) S. 501 ff.

/11/ A. SOKOLOWSKI: Präzision in der Metallbearbeitung, VEB Verlag Technik, Berlin 1955

/12/ H. STEFANIAK: Beitrag zur Theorie der selbsterregten Schwingungen, Maschinenmarkt 60 (1954) Heft 50/51 S. 37... S. 44

/13/ H. STEFANIAK: Übersicht über verschiedene Mechanismen der selbsterregten kleinen Schwingungen an Werkzeugmaschinen, VDI-Berichte Schwingungstechnik, Band 4, VDI-Verlag, Düsseldorf 1955

/14/ J. TLUSTY: Selbsterregte Schwingungen bei der Bearbeitung der Metalle, Acta technica Academiae scientiarum Hungaricae 8 (1954) S. 319 ... S. 358

/15/ R. ZURMÜHL: Praktische Mathematik, 3.Auflage, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1961

/16/ R. ZURMÜHL: Matrizen, 3.Auflage, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1961